重力波をとらえる

存在の証明から検出へ

中村卓史・三尾典克・大橋正健 編著

京都大学学術出版会

はじめに

重力波の魅力は何といっても未開拓な分野という点です. 一体何が見つかるかわからないというぞくぞくとした期待があります. 現代物理学のフロンティアなのです. しかし, 重力波は理論的には, すでに 1916 年にアインシュタインによってその存在が予言されていました. この予言の後, 40 年以上は重力波を含めた一般相対論の分野においては, 実験的にはもちろん, 理論的にもあまり大きな進歩はありませんでした. 実際 1962 年にプリンストン大学の大学院生になった Thorne (Kip Thorne, カリフォルニア工科大学の教授で重力波の理論的研究の世界的指導者) が, 指導教授から「物理や天文との結びつきがないので, 一般相対論だけはやらないように」と忠告されたのが, いかにも 1960 年代以前の, 一般相対論の沈滞を物語っています [Will 1986]. この状況を変えたのは, 1960 年代に起こった一般相対論のルネサンスです [Will 1986]. すなわち金星に対するレーダーエコー実験 (1961), 重力による赤方偏移の確認 (1960), QSO(Quasi-Stellar Objects) の発見 (1960), 2.7 K の宇宙背景輻射の発見 (1965), パルサーの発見 (1967), ブラックホール候補の X 線星の発見 (1971) 等がそれまでの沈滞を打ち破るルネサンスをもたらしたのでした. 重力波の研究にとって重要だったのは 1958 年頃メリーランド大学の Weber が重力波に伴った微少な潮汐力を検出する装置を作りはじめたことでした. これは, 直径 50 cm 長さが 1 m で質量が 1 トンのアルミ棒が重力波の潮汐力によって延び縮みするのを測ろうとするもので本書で共鳴型検出器として説明されます. Weber は 1968 年には, メリーランドと 1000 km 離れたアルゴンヌ国立加速器研究所に置かれた 2 つの検出装置で同時に信号を検出したと発表しました. 残念ながら, この Weber の報告は一般には, 重力波を検出したとは認められていませんが, 彼のこの先覚的な仕事が, 重力波の実験面での研究と理論面での研究を活性化したのですから, Weber の試みは大成果をあげたとみなすべきです.

我国では, 東京大学の平川浩正先生が 1969 年ごろから, 独自に開発した円板型やねじれ型のアンテナを用いて牡牛座のカニ星雲にあるパルサーから放出されているかもしれない周波数約 60 Hz の重力波を検出しようとしました. 平川浩正先生は重力波の検出を見ることなく他界されましたが (1986 年), 多くの優秀な研究者を残しました. 日本のグループをこの後を引き継いだのが X 線天文学の権威であった名古屋大学の早川幸男先生でした.

1980 年代後半に, 重力波の研究は 1 つの転回点を迎えていました. それまでのウェーバー型の検出器とは全く違う方法のレーザー干渉計型の検出器（本書の主題の 1 つです.）が, 将来の発展を考えて有望視され, 特に米国では LIGO (Laser Interferometric Gravitational wave Observatory) という大きな将来計画が出て来ていました. そこで, 1988 年 9 月　京都大学基礎物理学研究所のモレキュール型研究会「重力波天文学」に全国の重力波の研究に関連した実験家と理論家が集まりました. その結果我国の重力波の研究を組織化することが合意されました. その後, 1989 年度には早川幸男代表の文部省科学研究費補助金総合研究 (B) が始まりました. そして, 重力波の基礎研究を重点領域研究として推進することがグループ内で合意されました. これを受けて 1990 年 3 月に文部省科学研究費補助金重点領域研究「重力波天文学」の申請書を文部省に提出しま

した．この間，早川幸男先生を中心にして将来の本格的な検出装置の概念設計がスタートしました．重点領域「重力波天文学」は早川幸男先生が名古屋大学学長であったため，中村卓史 (京都大学基礎物理学研究所) が代わりに代表者となって，1991 年 ~1994 年度の 4 年間，総額約 6 億円の予算で認められ，国立天文台に 20 m のファブリ-ペロー型のプロトタイプを作ることを中心にして進められました．この間早川幸男先生は「天国で重力波検出を待っている．」という言葉を残して 1992 年 2 月に他界されました．概念設計は早川先生に「絵に描いた餅を書いてみよ」と言われてスタートし，重点領域研究「重力波天文学」の申請書に約 70 ページのものとして付けられました．1992 年 10 月には，三尾典克 (東京大学) と大橋正健 (国立天文台) が中心になって概念設計書の改訂版を「重力波アンテナ技術検討書 – 干渉計ハンドブック –」(A4 版 260 ページ) として発行しました．本書は，1992 年版技術検討書の改訂版をもとにして，重点領域の成果をも取り入れ，重力波の研究者だけでなく，大学院生や他分野からの研究者もが，重力波の源と検出法を理解する助けとなることを目的としています．

現在，我国における重力波の研究は，国立天文台に 300 m のファブリ-ペロー型の中間スケールの装置を作るという TAMA 計画（文部省科学研究費補助金新プログラムに係る創世的基礎研究費（略称新プロ）: 古在由秀代表) を中心にして進められています．本書が来るべき「重力波天文学」のスタートと進展に寄与することを心から願っています．

編者　中 村 卓 史
三 尾 典 克
大 橋 正 健

目　次

重力波をとらえる

存在の証明から検出へ

中村卓史・三尾典克・大橋正健 編著

第1章・序論

本章では宇宙の諸階層の概説と初期値問題としてのニュートン力学と一般相対性理論を取り上げる．一般相対性理論に関しては，教科書を参照してもらうことにする．例えば，ランダウ／リフシッツ [1964]，平川浩正 [1971]，Weinberg [1972]，Misner, Thorne and Wheeler [1973]，内山龍雄 [1976]，佐藤文隆 [1981]，Wald [1984]，藤井保憲 [1990]，冨田憲二 [1991] 等がある．一般相対性理論の初期値問題を知っておられる読者は本章をスキップしてほしい．重力波の伝播と生成についても知っておられる読者は直接第 4 章重力波の源から読み始めてほしい．

1-1　宇宙の諸階層

我々は，地球という惑星に住んでいる．地球の半径は約 6378 km で，質量は 5.974×10^{27} g [1] である．また，平均密度は，5.52 $\mathrm{g\,cm^{-3}}$ である．「地球は青かった」というガガーリンの言葉に代表されるように，人工衛星からの地球の写真は確かに白い雲，青い海と茶色の大地の織りなす美しい惑星を示している．我々の地球は，太陽系と呼ばれる惑星系の一員である．水星，金星と火星は，地球型と呼ばれる惑星で，平均密度は 3.9~5.5 $\mathrm{g\,cm^{-3}}$ で，主成分は岩石や鉄である．天文学で基本的な単位は，地球の太陽に対する軌道長半径 A で，これは天文単位 (AU) と呼ばれる．その長さは

$$\begin{aligned} A &= 1\mathrm{AU}\ (\text{Astronomical Unit}) \\ &= 1.49597870 \pm 0.000005 \times 10^{13}\ \mathrm{cm} \\ &= \text{約 1 億 5000 万 km} \end{aligned} \tag{1-1}$$

である．太陽系には地球型以外にも，木星型と呼ばれる惑星がある．木星は太陽系最大の惑星で，その質量は地球の 317 倍，軌道長半径は 5.2AU である．また，平均密度は 1.33 $\mathrm{g\,cm^{-3}}$ で，主成分は太陽と同じく水素とヘリウムのガスである．しかし質量が小さいため，中心温度は核反応する温度にならないので自らは輝かない．土星，天王星と海王星も木星型に属する．太陽系の中で一番遠い惑星，冥王星は軌道長半径が 39.5 AU の所にある．太陽系には，これ以外にも，彗星や小惑星という構成員もある．太陽系の大きさは，彗星の巣と考えられている Oort 雲 (Oort cloud) を考えてもせいぜい約 $10^4\mathrm{AU} \cong 10^{17}\mathrm{cm}$ である．

---

1) 第 1 ~ 4 章では，宇宙関係の理論で，ふつう使われている cgs 単位系を用いる．

太陽系の中心には，自ら輝く星＝恒星の1種である太陽がある．太陽の質量，半径と光度は，慣用に従ってそれぞれ $M_\odot$, $R_\odot$, $L_\odot$ と書く ($\odot$ というのは，太陽を示す記号である)．それらの値は

$$M_\odot = 1.989 \times 10^{33}\ \mathrm{g} \tag{1-2}$$

$$R_\odot = 6.960 \times 10^{10}\ \mathrm{cm} \tag{1-3}$$

$$L_\odot = 3.9 \times 10^{33}\ \mathrm{erg\ s^{-1}} \tag{1-4}$$

である．太陽の表面温度は 5780 K，中心の温度は 1.56×10^7 K，中心密度は 151 $\mathrm{g\,cm^{-3}}$ [Bahcall and Pinsonneault 1992] である．また平均密度は 1.4 $\mathrm{g\,cm^{-3}}$ である．隕石の放射性同位元素による年代測定によって，太陽系したがって太陽の年齢は約46億年である．

星の進化の計算によると [例えば Kippenhahn and Weigert 1990, 齋尾英行 1992]，現在太陽の中心の水素の約半分はヘリウムになっており，今から約50億年後には，ヘリウムの芯が全質量の40％を占めるようになる．この時，太陽の光度は約 $10^3 L_\odot$ また半径は 100 $R_\odot$ になっていて，いわゆる赤色巨星となる．地球が，この時太陽に呑み込まれるかどうかは，はっきりしないが，地球の表面温度は約 1600 K に増大する．その後太陽は，大量の質量を放出するとともに，中心は収縮して高密度の白色矮星 (質量 $\sim M_\odot$，半径 $\sim 10^{-2} R_\odot$，密度 $\sim 10^6\ \mathrm{g\,cm^{-3}}$) [Shapiro and Teukolsky 1983 chapter 3] になり，冷却していくと考えられる [林忠四郎 1983]．このように，太陽をはじめとする恒星は，永久に輝いているわけではない．生があり死があるわけである．

恒星の質量の値は，最小は約 0.08 $M_\odot$ であり，最大は約 60 $M_\odot$ 程度であると考えられているが，最大値はまだはっきりしていない．太陽から最も近い恒星ケンタウルス座のアルファ星は地球から4.3光年の距離にある．天文学では，歴史的な事情から距離の単位としては，光年よりもパーセク (pc: parsec) を用いる．1光年と 1 pc はそれぞれ

$$1\ 光年 = 9.460 \times 10^{17}\mathrm{cm} = 6.324 \times 10^4\mathrm{AU} \tag{1-5}$$

$$1\mathrm{pc} = 3.0856 \times 10^{18}\mathrm{cm} = 3.26\ 光年 \tag{1-6}$$

である．1 pc の距離はなれたところでの角度の1秒は実距離にすると 1 AU になる．これが 1 pc の定義である．歴史的には，まず，年周視差を用いて恒星までの距離を測ったので，光年より pc が用いられるようになったわけである．kpc ($=10^3$ pc)，Mpc ($=10^6$ pc) や Gpc ($=10^9$ pc) という単位も用いられる．

恒星はどのようにして誕生するのであろうか．恒星は，単独で誕生するのではなく，星間ガスの密度の高い所でいくつも同時に誕生すると考えられている．例えば，オリオン座のガス雲が典型的な例である．星間ガス雲のサイズは約 10 pc で質量は約 1000 $M_\odot$ 程度である．したがって平均密度は 10 水素原子 $\mathrm{cm^{-3}}$ 程度である．オリオン星雲では，現在も星が形成されている．つまり，ガス雲中に発生した密度ゆらぎが重力によって成長し，星が誕生すると考えられている．その詳しいメカニズムは天体物理学の大きな研究テーマであるが，オリオン星雲のようなガス雲で星が誕生することは間違いないと考えられている．オリオン星雲のようなガス雲で星の形成が終了すると，残りのガスは星間空間に放出されて，プレアデス (すばる) のような若い星の集団 (散開星団：約100個の星からなる) になると考えられている．

恒星はどのようにして輝いているのであろうか．まずガス雲の密度の濃い部分が収縮を始める．収縮をするということは，重力エネルギーが負で絶対値が大きくなることである．したがって，こ

の段階では重力エネルギーをエネルギー源として輝いている．さて, 重力エネルギー (E_g) をエネルギー源とすると, 太陽は何年輝けるだろうか．半径 $R_\odot$, 質量 $M_\odot$ と重力定数 $G(=6.672\times10^{-8}$ dyn cm^2 g^{-2}) を用いて重力エネルギーを評価するとおおよそ

$$E_g \simeq -\frac{GM_\odot^2}{2R_\odot} = -2\times10^{48}\ \mathrm{erg} \tag{1-7}$$

であるから, 太陽が重力エネルギーを使って輝ける寿命 t_g は

$$t_g \sim \frac{|E_g|}{L_\odot} = 5\times10^{14}\ \mathrm{s} = \text{約}\,1700\,\text{万年} \tag{1-8}$$

となる．しかしこれは, 太陽の年齢 46 億年に較べてケタはずれに短い．この困難は恒星のエネルギー源の問題として 1939 年までは未解決であった [Eddington 1926]. 太陽は水素とヘリウムからなるので, 歴史的にはエネルギー源として, もちろん核反応が考えられた．しかし, それらは p を陽子として,

$$\begin{aligned} \mathrm{p}+\mathrm{p} &\to \mathrm{He}^2\ (\text{不安定}) \ \to \mathrm{p}+\mathrm{p} \\ \mathrm{p}+\mathrm{He}^4 &\to \mathrm{Li}^5\ (\text{不安定}) \ \to \mathrm{p}+\mathrm{He}^4 \\ \mathrm{He}^4+\mathrm{He}^4 &\to \mathrm{Be}^8\ (\text{不安定}) \ \to \mathrm{He}^4+\mathrm{He}^4 \end{aligned} \tag{1-9}$$

等であって, どれも発熱反応にならない．この問題を解決したのが, Bethe [1939] (1967 年ノーベル物理学賞) で,

$$\mathrm{p}+\mathrm{p} \to \mathrm{D}^2+\mathrm{e}^+ + \nu_e \quad (1.28\ \mathrm{MeV}) \tag{1-10}$$

という弱い相互作用によって, 重水素 (D) ができる発熱反応が存在することを見い出した．ここで e^+ は陽電子, ν_e はニュートリノである．(1-10) の反応に続いて,

$$\mathrm{D}+\mathrm{p} \to \mathrm{He}^3+\gamma \quad (5.493\ \mathrm{MeV}) \tag{1-11}$$

$$\mathrm{He}^3+\mathrm{He}^3 \to \mathrm{He}^4+2\mathrm{p} \quad (12.86\ \mathrm{MeV}) \tag{1-12}$$

が起こる．ここで γ は光子を表す．結局 4 つの水素が 1 つのヘリウム He^4 になって, 1 水素当たり 6.6 MeV のエネルギーが放出される．これを水素燃焼と呼んでいる．

誕生した恒星は重力収縮して, 中心の温度が約 1000 万度を超えると, 上に述べた水素燃焼が始まり収縮は止まる．恒星の水素核燃焼の時期は主系列時代と呼ばれる．主系列の時代の寿命は星の質量によって大きく異なる．星の半径 (R) と星の光度 (L) は観測的にも星の内部構造論からも質量 M の関数として, おおよそ [Kippenhahn and Weigert 1990]

$$\begin{aligned} R &\simeq R_\odot \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{0.6} \\ L &\simeq L_\odot \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{3.5} \end{aligned} \tag{1-13}$$

で与えられる．大きい質量の星の方が光度 (L) が大きく, 相対的にたくさん燃料を消費するのである．さて, 主系列時の寿命 (t_{main}) は燃料の量 (質量に比例) を燃料消費率で割ればよいから

$$t_{\mathrm{main}} \simeq 10^{10}\text{年} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-2.5} \tag{1-14}$$

となる．太陽の水素燃焼時代の寿命は約 100 億年である．しかし，$M = 10\ M_{\odot}$ の恒星の寿命は 3000 万年程度である．さて，太陽は生まれてから 100 億年経つと，すでに述べたように中心はヘリウムが主成分になる．ところで，中心温度が約 1000 万度以上で水素燃焼が起こるというが，それは一体何によって決まっているのであろうか．$T = 10^7$K はエネルギーに換算すると

$$E_{\rm th} = k_{\rm B}T \simeq 1{\rm keV} \tag{1-15}$$

ここで $k_{\rm B}$ はボルツマン定数 $(1.38 \times 10^{-16}{\rm erg\,K^{-1}})$ である．さて，(1-10) の反応が進むためには，陽子 p と陽子 p が衝突する必要がある．しかし，p と p は電荷 $e(= 4.8 \times 10^{-10}$ cgs esu) を持っているため，クーロンエネルギー $E_{\rm c}$ を生じる．陽子の大きさ r_0 は 10^{-13}cm 程度であるから

$$E_{\rm c} \simeq \frac{e^2}{r_0} \simeq 3{\rm MeV} \tag{1-16}$$

となる．$E_{\rm c} \gg E_{\rm th}$ であるから，クーロン障壁のため古典的には 2 つの陽子は衝突できない．2 つの陽子はクーロン障壁を量子力学的なトンネル効果で突破してはじめて反応できるわけである．トンネル効果は，量子力学で学んだように指数関数的に決まっているから，反応できるための $E_{\rm th}$ は，ある値以上というのが決まってしまい，それが，水素燃焼の場合約 10^7K になるわけである．しかし，次のヘリウム燃焼では，電荷が 2 倍になるため $E_{\rm c}$ は 4 倍になるので，ヘリウムが燃焼するための最低温度は約 10^8K となる．水素燃焼が進むと，星の中心ではヘリウムを中心とする中心核ができるが，水素燃焼の温度ではヘリウムには点火しない．エネルギー発生のないヘリウムの中心核は，質量がある値 (全質量の約 10%：シェーンベルク-チャンドラセカール 限界) を超えると平衡解が存在しなくなり重力収縮を始め，中心温度が上昇を始める [Kippenhahn and Weigert 1990]．その結果中心温度が約 10^8K に達したときヘリウム燃焼段階になる．ヘリウムは燃焼すると炭素と酸素になる．この後の進化は，水素をヘリウム，ヘリウムを炭素と酸素に置き換えて考えればよい．すなわち炭素と酸素よりなる中心核が重力収縮を始める．そして，ついに中心温度が約 10^9K になって炭素が燃焼を始める．このような核燃焼 → 燃料枯渇 → 中心核の重力収縮 → 中心温度上昇 → 新しい燃料に着火 → 核燃焼，という現象が続いて星の進化が進んでいく．そして，中心部分の密度は，常に上昇するとともに，よりコンパクトな中心核が形成される．

さて，どの段階まで核燃焼が進むかは，星の質量に依存する．星の進化の最終段階は星の質量 M によって次のようになると考えられている [Nomoto and Hashimoto 1988, 齋尾 1992].

1) $M < 0.08\ M_{\odot}$
水素燃焼をしない．つまり，中心温度が重力収縮しても 10^7K を越えないので，木星のような惑星と基本的には同じである．時間と共に温度が下がる褐色矮星 (Brown Dwarf) と呼ばれる星になる．

2) $0.08\ M_{\odot} \lesssim M < 0.45\ M_{\odot}$
水素燃焼はするが，ヘリウムには着火しない．しかし，主系列の寿命は宇宙の年齢 (約 140 億年) より長いので，まだ進化の最終段階に至っていない．

3) $0.45\ M_{\odot} \leqq M \lesssim 8\ M_{\odot}$
ヘリウムにも着火して炭素と酸素の中心核ができる．その後巨星段階で，水素を主成分とす

る外層を放出して白色矮星になると考えられる．ここで白色矮星とは電子の縮退圧によって支えられる星である [Shapiro and Teukolsky 1983 chapter 3]．

4) $8\ M_\odot \lesssim M \lesssim 13\ M_\odot$
ネオン-酸素-マグネシウムからなる中心核ができるところまで進化し，その後電子捕獲によって中性子星ができると考えられている．中性子星とは，中性子を主成分とする高密度 ($3\times10^{14}\ \mathrm{g\,cm^{-3}}$ 以上) な星である．中性子星については第 3 章で詳しく説明する．

5) $M \gtrsim 13\ M_\odot$
水素，ヘリウム，炭素，ネオン，酸素そしてシリコン燃焼が起こり，最終的に鉄の中心核ができる．鉄は，1 核子当たりの結合エネルギーが最も大きい (8.8 MeV/核子)．したがってもはや発熱反応は起こらない．中心核はチャンドラセカールの臨界質量 (第 4 章で説明) を超えると重力崩壊するとともに，中性子星を形成する．この時発生した衝撃波は外層をとばす．この現象は，超新星爆発と呼ばれている．超新星爆発とそれに伴う中性子星の形成は，重要な重力波の源と考えられているので，第 4 章で詳しく述べる．中性子星はパルサーとして発見された．例えば，カニ星雲は牡牛座にある超新星の残骸で，1054 年に爆発したが，中心にはパルサー (磁場を持って回転している中性子星) が存在している．パルサーも重力波の源である可能性があるので，これも詳しく第 3 章と第 4 章で述べる．さて，超新星爆発はいつでも起きるのだろうか．超新星爆発に失敗すると，星の外層 ($\gtrsim 10\ M_\odot$) は中性子星に落下してくる．第 3 章で述べるように，中性子星には最大質量があって，一般相対論が正しくて物質の音速が光速を超えないなら，それは $3\ M_\odot$ 以下であることが証明されている．したがって，外層が落下してくると重力収縮はもはや止まらないので，ブラックホールが形成されると考えられる．このようなことは星の質量が $M > 30M_\odot$ の場合に起こると言われている．実際 Cyg X-1 という X 線星は $M > 8M_\odot$ のブラックホールであるといわれている．このような X 線星は現在少なくとも 4 つ知られている [McClintok 1991]．

星間分子雲で誕生した星は質量に応じて上に述べたように進化すると考えられている．星団のなかには，先程述べた散開星団の他に球状星団と呼ばれる古いものもある (年齢 $\sim$ 140 億年)．大きさは 10 pc 程度，星の数は約 100 万個である．さて，球状星団も散開星団も星間ガスもパルサーも，円盤状の渦状銀河である我々の銀河系 (Galaxy) に属している．円盤の半径は 10 kpc 程度で厚さは約 1 kpc，質量は $10^{11}M_\odot$ 程度，すなわち約 1000 億個の恒星が円盤状に分布しており，太陽の近くで周期約 2.5 億年で回転している．例えば $10\ M_\odot$ の星の場合，寿命は約 3000 万年であるので一生の間に銀河は 8 分の 1 回転するだけである．したがって銀河が 1 回転する間に質量の大きい星は何回も誕生し死んでいることになる．渦状銀河の渦は明るい星の作るパターンであって，質量の分布は，渦状ではなくて円盤状であり，渦の所の密度は平均密度に較べて，せいぜい 5%程度大きいだけと考えられている．我々の銀河には大マゼラン雲 (質量 $\sim 10^{10}M_\odot$，太陽からの距離 50 kpc) と小マゼラン雲 (質量 $\sim 10^9M_\odot$，太陽からの距離 54 kpc) という 2 つの小さな銀河がお供のようについている．我々に一番近い大きな銀河はアンドロメダ銀河 (質量 $\sim 3\times10^{11}M_\odot$，距離約 700 kpc) である．銀河の中には，楕円型の楕円銀河もある．これらの大きな銀河 (質量 $\sim 10^{11}M_\odot$ 程度，$L \sim 10^{10}L_\odot$ 程度) の個数密度は Efstathiou, Ellis and Peterson

[1988] によると

$$n_{\rm gal} \simeq 0.01{\rm Mpc}^{-3} \tag{1-17}$$

で与えられる．銀河の平均間隔は 4 Mpc 程度であることになる．いくつかの銀河の中心には，質量が $10^6 M_\odot \sim 10^8 M_\odot$ の大きな質量のブラックホールが存在していると言われている [例えば Miyoshi et al. 1995]．銀河の中には，銀河団という数十 ~300 個の銀河が，大きさ ~1 Mpc 程度の集団を成しているものもある．また銀河団にはダークマターが存在していると思われている．これは個々の銀河の質量を足しても銀河団の質量の 10 分の 1 程度にしかならないので，重力を担う質量は持っているが光を出さない暗い物質が存在すると考えられている [例えば Koyama and Tsuru 1992]．さらには，最近の観測によるとこれらの銀河や銀河団も超銀河団という構造を作っていると考えられている．図 1-1 は我々から約 700 Mpc までの銀河の奥行き分布を示し

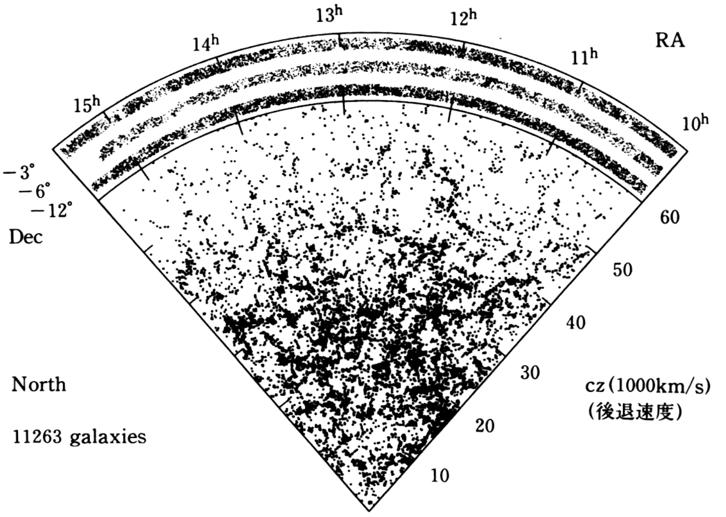


図 1-1　超銀河団の図 Las Campanas Redshift Survey (Shectman et al. astro-ph/9604167)

ている．扇形の先端が我々の位置で，扇形の周辺が我々から約 700 Mpc である．それぞれの点が銀河を示す．銀河の総数は 1 万程度のデータであるから，これでも宇宙のほんの一部であるが，銀河が泡状に分布している．また，銀河の存在しないボイド構造も見える．我々が観測できる最も遠方からは QSO (Quasi Stellar Object) と呼ばれる準恒星状天体が我々に姿を見せてくれている．これは，宇宙の初期に銀河の中心にあるブラックホールに何らかの原因でガスが落下する時の現象と考えられている．

このように宇宙には多様な階層が存在している．その大きさも質量も密度も様々である．図 1-2 では横軸にこれらの諸階層のサイズをとり，縦軸に密度をとって，それぞれがこの平面上でどこに存在するかを示した．右上の斜線内に入ると与えられたサイズに対して密度が高すぎるためにブラックホールになるが，これは必ずしもこのようなブラックホールが存在しているという意味ではない．いわば，観測可能な構造としての禁止領域である．図 1-2 を見て何を感じることができるだろう．サイズの小さいものほど密度が高い．これは，宇宙ではサイズの大きなものが

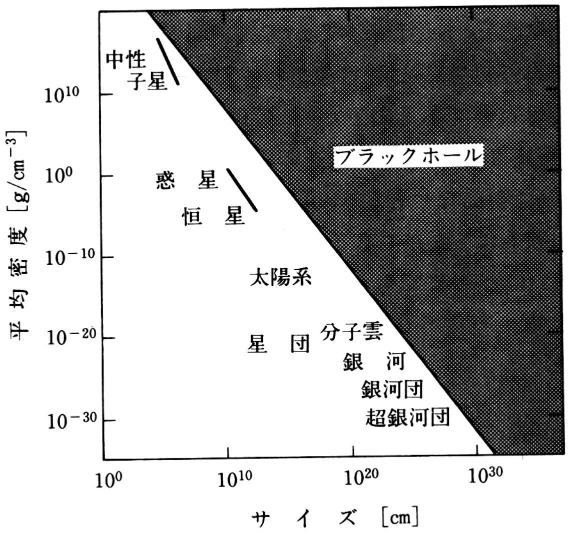


図 1-2　天体の諸階層

分裂収縮して, サイズが小さくて密度の高いものができたことを示唆している. 宇宙でいま知られている最も大きな構造は図 1-1 の超銀河団であるが, これと一番小さな構造である中性子星とでは, 45 桁にも及ぶ密度の濃縮がある. これは天文学的なスケールでの濃縮であり, このようなことがどうして起こったのかは, まさに不思議という他ない. 我々の体自身も考えてみれば, あたりまえにできたわけではない. 我々の体は, 水素, 炭素, 酸素, 窒素を主成分として作られている. その密度は $1\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ 程度であるが, これも宇宙の平均密度 ($\sim 10^{-30}\mathrm{g\,cm^{-3}}$) からすると大変な高密度物質であって中性子星ほどではないが, 30 桁にも及ぶ濃縮の結果, 生命がそして人類が存在している. つまり, 宇宙におけるこの濃縮過程は人類の存在の起源そのものと関わっているのである.

さて, 現在自然界には 4 つの力 (相互作用) が存在することが知られている.

[1] 強い相互作用　これは原子核中で, 陽子と中性子を結合している力である. その到達距離は 10^{-13} cm 程度であり, これより遠くでは指数関数的に減少する.

[2] 弱い相互作用　これは中性子が陽子, 電子とニュートリノに崩壊するような現象で働く力である. その到達距離は 10^{-16} cm 程度で, それより先では, やはり指数関数的に減少する.

[3] 電磁相互作用　電荷間に働く力で, クーロンの逆 2 乗則に従う.

[4] 重力相互作用　惑星の運動から発見された力で, 逆 2 乗則に従う.

この中で, 強い相互作用と弱い相互作用では, 力はその到達距離外では実質的にゼロになると考えてよいので短距離力と呼ばれる. 一方, 電磁相互作用と重力相互作用は, 距離とともに減少するが, その減少の割合は指数関数のように急激ではない. ある距離から外では力は実質的にゼロと言える特徴的な長さがないので, 長距離力と呼ばれる. さて, 自然界のすべての現象はこの

4 種類の相互作用によって決められている.[2] したがってすべての相互作用が重要である. 弱い相互作用による式 (1-10) のような反応があるから式 (1-11) と (1-12) の強い相互作用で反応が進んで, 太陽が 46 億年も輝き続けることができたわけである. しかし, 宇宙では図 1-2 で述べた 45 桁にも及ぶ濃縮過程が最も重要であるので, ここでは強い相互作用と弱い相互作用は副次的に考えたい. 例えば, 単に核反応率としてその公式のみを考えることにする. 電磁相互作用は長距離力ではあるが, マクロな (巨視的な) 系では, 正の電荷と負の電荷は同数であるため, 実際上は短距離力になってしまう. 残るは, 重力である. 重力のみが引力しかない長距離力である. 負の質量は存在しないから, 引力はどこまでも消されない. それゆえ濃縮が進行し, 図 1-2 のような諸階層ができたのであると言えるだろう.

1-2 ニュートン力学と宇宙の諸階層

星間ガス中の密度の濃い部分が, 重力崩壊して星が形成され, その後星が核燃焼を通して進化することを例として考えてみよう. このような時にはガスの密度 ρ を空間座標 $x_i(i=1,2,3$ で $x_1=x,\ x_2=y,\ x_3=z)$ と時間座標 t の関数として考えるのが 1 つの方法である (オイラー法). 空間座標 x_i は時間的に変化しない. すなわち ρ を独立変数 x_i と t の関数 $\rho(x_1,x_2,x_3,t)$ として考える. ガスの各部分は, ある速度 v_i で動いている. v_i も x_i と t の関数 $v_i(x_1,x_2,x_3,t)$ と考える.

1-2-1 質量の保存

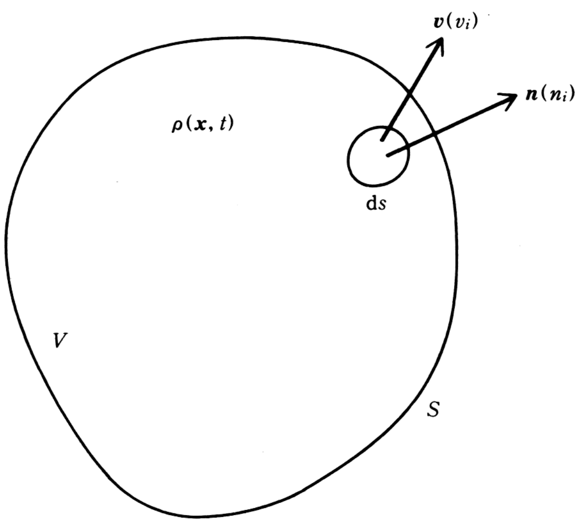


図 1-3 S と V, $\mathrm{d}S$, n_iの図

2) 実は, 弱い相互作用と電磁相互作用は, Weinberg と Salam による電弱統一理論によって 1 つのものと考えられているし, 4 つの相互作用を統一する試みもなされているが, ここでは, 4 つは別のものと考える.

いま考えているガスの中に空間に固定した任意の閉曲面 S を考え，これによって囲まれる体積を V とする．S の微小部分 $\mathrm{d}S$ での外向きの法線方向の単位ベクトルを n_i とする．面要素 $\mathrm{d}S$ を通して単位時間に流入する質量は $-\rho v_i n_i \mathrm{d}S$ である．ここで同じ添字 i が 2 度あらわれると i について 1 から 3 までの和をとるものとする．つまり

$$v_i n_i = \sum_{i=1}^{3} v_i n_i \tag{1-18}$$

である (アインシュタインの規則)．さてこの体積 V 中にあるガスの全質量の時間変化は，流入してくる質量に等しいから，

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \mathrm{d}V = -\int_S \rho v_i n_i \mathrm{d}S \tag{1-19}$$

が成立する．ベクトル解析でよく知られた任意の量 $Q(x_i, t)$ に対して成立するガウスの定理

$$\int_S Q n_i \mathrm{d}S = \int_V \frac{\partial Q}{\partial x_i}\mathrm{d}V \tag{1-20}$$

を使うと式 (1-19) は

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}V = 0 \tag{1-21}$$

と書くことができる．式 (1-21) は任意の閉曲面 S で囲まれた V で成立するから，被積分関数がゼロでなくてはならない．このようにして，質量の保存を表している連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 \tag{1-22}$$

が得られる．逆にある量 Q が式 (1-22) を満たしているとしよう，

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(Q v_i)}{\partial x_i} = 0\ . \tag{1-23}$$

S として，問題となっているガス雲を囲む曲面をとる．いま Q の体積積分の時間変化を考えると式 (1-23) を使って

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\int_V Q\mathrm{d}V &= \int_V \frac{\partial Q}{\partial t}\,\mathrm{d}V \\ &= -\int_V \frac{\partial(Q v_i)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}V = -\int_S Q v_i n_i \mathrm{d}S = 0\ .\end{aligned} \tag{1-24}$$

ここで，S 上では $Q=0$ を仮定した．すなわち Q の体積積分は時間的に一定になる．Q として ρ を採用し，V として全体積を考えると，これは全質量が保存することを意味する．このことは後の第 2 章と第 3 章でも使うので記憶しておいて欲しい．

1-2-2　運動方程式

ガス中には圧力があるので圧力 $p(x_i, t)$ も考える．また，重力加速度 g_i は重力ポテンシャル $\psi(x_i, t)$ によって

$$g_i = -\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \tag{1-25}$$

で与えられる．今度は図 1-3 の体積 V 中の運動量 ρv_i を考える．運動量の時間変化は単位時間当たり $\mathrm{d}S$ を通して流入してくる運動量 $-\rho v_i v_j n_j \mathrm{d}S$ と外のガスの圧力 p による力 $-pn_i\mathrm{d}S$ と重力による力 g_i の和に等しいから

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho v_i \mathrm{d}V = -\int_S (\rho v_i) v_j n_j \mathrm{d}S - \int_S p n_i \mathrm{d}S - \int_V \rho\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}V \tag{1-26}$$

となる．右辺第 1 項と第 2 項にガウスの定理 (1-20) を使うと, (1-22) を得た時と同様の手続きによって運動方程式

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \tag{1-27}$$

を得る．(1-27) は右辺第 1 項を左辺に移項して

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \tag{1-28}$$

と書く．また連続の式 (1-22) を使って

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \tag{1-29}$$

と書き換えることもできる．

1-2-3　エネルギー方程式

ガスの単位質量当たりの内部エネルギーを $\epsilon(x_i, t)$, 単位質量当たりの核反応等によるエネルギー発生率を $r(x_i, t)$, また, 伝導や放射による単位時間, 単位面積を通過する熱の流れを $F_i(x, t)$ としよう．するといままでと同様にして

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\left(\frac{1}{2}v_i v_i + \epsilon\right)\mathrm{d}V = -\int_S \rho\left(\frac{1}{2}v_i v_i + \epsilon\right) v_j n_j \mathrm{d}S - \int_S p n_j v_j \mathrm{d}S - \int_S F_j n_j \mathrm{d}S + \int_V \rho r \mathrm{d}V - \int_V \rho\frac{\partial \psi}{\partial x_j} v_j \mathrm{d}V \tag{1-30}$$

ここで右辺第 1 項は $\mathrm{d}S$ を通して流入する運動エネルギーと熱エネルギー, 第 2 項は, 圧力によってなされる仕事, 第 3 項は流入する熱流, 第 4 項は発生する熱量, 第 5 項は重力によってなされる仕事である．ガウスの定理を使うことにより

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(\frac{1}{2}v_i v_i + \epsilon\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho\left(\frac{1}{2}v_i v_i + \epsilon\right) v_j\right) = -\frac{\partial p v_j}{\partial x_j} - \frac{\partial F_j}{\partial x_j} + \rho r - \rho\frac{\partial \psi}{\partial x_j} v_j \tag{1-31}$$

を得る．(1-31) で運動エネルギーに関した項は (1-28) を使って

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(\frac{1}{2}v_i v_i\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho\left(\frac{v_i v_i}{2}\right) v_j\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i v_j}{\partial x_j}\right) v_i + \frac{1}{2}\rho v_i\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)$$

$$= -v_j \frac{\partial p}{\partial x_j} - \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \rho v_j \tag{1-32}$$

となる. (1-32) を (1-31) に代入すると

$$\frac{\partial(\rho\epsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\epsilon v_j)}{\partial x_j} = -p\frac{\partial v_j}{\partial x_j} - \frac{\partial F_j}{\partial x_j} + \rho r \tag{1-33}$$

となる. ここで注意しておかなければならないのは, p, ρ と ϵ には, 一般に熱力学的関係式 $p = p(\rho, \epsilon)$ が存在しているので, p は ϵ と ρ がわかれば決まる. (1-33) はさらに連続の式 (1-22) を使うと

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + v_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = -\frac{p}{\rho}\frac{\partial v_j}{\partial x_j} + \left(r - \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_j}{\partial x_j}\right) \tag{1-34}$$

と書ける. いま

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}Q = \frac{\partial Q}{\partial t} + v_j \frac{\partial Q}{\partial x_j}$$

で, 流体といっしょに運動している観測者の測る時間変化 (ラグランジュ微分) $\mathrm{D}/\mathrm{D}t$ を定義すると, (1-22) は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0$$

と書けるので,

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\rho\right) . \tag{1-35}$$

また

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \equiv r - \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_j}{\partial x_j} \tag{1-36}$$

とすると (1-34) は

$$\frac{\mathrm{D}\epsilon}{\mathrm{D}t} = -p\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \tag{1-37}$$

となる. $1/\rho$ は単位質量当たりの体積 V だから (1-37) は熱力学の第 1 法則

$$\mathrm{d}\epsilon = \mathrm{d}q - p\mathrm{d}V \tag{1-38}$$

に他ならない.

次に重力ポテンシャル ψ を考えよう. 点 $\boldsymbol{x}'$ のまわりの微小体積 $\mathrm{d}V'$ が点 $\boldsymbol{x}(\neq \boldsymbol{x}')$ に作る重力ポテンシャル $\mathrm{d}\psi$ は,

$$\mathrm{d}\psi = -\frac{G\rho(\boldsymbol{x}')}{|\,\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'\,|}\mathrm{d}V' \tag{1-39}$$

であるから

$$\psi = -\int \frac{G\rho(\boldsymbol{x}')}{|\,\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'\,|}\mathrm{d}V' \tag{1-40}$$

と書ける．さて

$$\Delta \frac{1}{|\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\,|} = -4\pi\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{1-41}$$

であるから式 (1-40) の両辺に Δ を作用させて, 式 (1-40) の微分形 (ポアッソン方程式)

$$\Delta\psi = 4\pi G\rho \tag{1-42}$$

を得る．

1-2-4　ニュートン力学での基礎方程式

以上で, ガス雲中での密度の濃い部分が重力収縮して星になるような宇宙での濃縮過程を調べる時の基礎方程式が明らかになった．それらは

1) 連続の式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho v_i}{\partial x_i} = 0 \tag{1-43}$$

2) 運動方程式

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \tag{1-44}$$

3) エネルギー方程式

$$\frac{\partial\epsilon}{\partial t} + v_j\frac{\partial\epsilon}{\partial x_j} = -\frac{p}{\rho}\frac{\partial v_j}{\partial x_j} + \left(r - \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_j}{\partial x_j}\right) \tag{1-45}$$

4) ポアッソン方程式

$$\Delta\psi = 4\pi G\rho \tag{1-46}$$

5) 状態方程式

$$p = p(\epsilon, \rho) \tag{1-47}$$

である．式 (1-43) ～ (1-47) は次のようにして解けばよい．$t=0$ で, ρ, v_i と ϵ の分布を与える．まず式 (1-46) を解いて, 重力ポテンシャル ψ を決める．また, 式 (1-47) より p がわかる．次に式 (1-43) ～ (1-45) は

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} \equiv S_\rho \tag{1-48}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \equiv S_{v_i} \tag{1-49}$$

$$\frac{\partial\epsilon}{\partial t} = -v_j\frac{\partial\epsilon}{\partial x_j} - \frac{p}{\rho}\frac{\partial v_j}{\partial x_j} + \left(r - \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_j}{\partial x_j}\right) \equiv S_\epsilon \tag{1-50}$$

と書き換えられる. r, F_j は一般に ρ と ϵ ならびにその空間微分の関数として与えられる. その結果, 式 (1-48) ～ (1-50) の右辺 $S_\rho, S_{v_i}, S_\epsilon$ は $t=0$ でのデータですべて決まるから, 時間発展させれば

$$\rho(x, t+\Delta t) = \rho(x, t) + S_\rho \Delta t + O(\Delta t^2) \tag{1-51}$$

$$v_i(x, t+\Delta t) = v_i(x, t) + S_{v_i} \Delta t + O(\Delta t^2) \tag{1-52}$$

$$\epsilon(x, t+\Delta t) = \epsilon(x, t) + S_\epsilon \Delta t + O(\Delta t^2) \tag{1-53}$$

となって $t+\Delta t$ での ρ, v_i, ϵ が決まる. $t+\Delta t$ での ρ, v_i, ϵ が決まれば, $t+\Delta t$ での ψ と p は式 (1-46) と (1-47) で決まる. このようなことを繰り返していけば, 与えられた初期条件の下での系の進化, つまり時間発展を決めることができる. 星の進化も例外ではなく式 (1-43) ～ (1-47) に輻射輸送の式を入れた基礎方程式で決められる. もちろんエネルギー発生率 r は強い相互作用と弱い相互作用によって決められる核反応の基礎理論から, ρ と ϵ (または, 温度 T) の関数 $r(\rho, \epsilon)$ として与える必要がある. また, エネルギー流量 F_i は, エネルギーが輻射で運ばれるとすると, 温度勾配と, 各種の光の散乱・吸収係数で決められる. r とか F_i を計算するのに量子力学は必要であるが, 初期条件 (初期データ) と適当な境界条件が与えられれば, 原理的にはすべてが決まるはずである. 星の進化に限らず, 星団の形成と進化, 銀河・銀河団の形成, 進化等の多くの天体現象は基本的には式 (1-43) ～ (1-47) のニュートン力学で記述できる. もちろん, 我々人類はその解の全容をまだ認識はしていない. 多くの問題は大変難しいが, 原理的には解けるはずである.

1-3　初期値問題としてのアインシュタイン方程式

アインシュタイン方程式は

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu} \tag{1-54}$$

である. ここで $R_{\mu\nu}$ はリッチテンソル, R はスカラー曲率, $T_{\mu\nu}$ は物質のエネルギー運動量テンソルである. また $\mu\nu$ は 0, 1, 2, 3 の値をとる. 上式で c と G がなくなっているが今後は $c=G=1$ の単位を使う. (c と G を示した方が, わかりやすいときには c と G を入れる.) この意味は次の通りである. アインシュタイン理論に固有な物理定数は c と G の 2 つである. しかし 2 つの物理定数だけからはすべての次元を作るわけにはいかない. そこで, 考えている系の質量を M とすると, 長さの単位は GM/c^2, また時間の単位は GM/c^3 で与えられる. M として太陽質量 $(=2\times10^{33}\mathrm{g})$ をとると, 長さの単位は 1.5 km, 時間の単位は 5×10^{-6} 秒となる. もちろん質量の単位を太陽以外にしてもよいが, 質量の単位を決める度に長さと時間の単位が自動的に決まってくる. これが, $c=G=1$ の単位系の意味する所である. $T_{\mu\nu}$ として流体のエネルギー運動量テンソルを考える時, 式 (1-54) はニュートン極限で, 1-2-4 項におけるニュートン力学の基礎方程式 (1-43)~(1-47) になるはずである. しかし, 式 (1-54) のままでは, 時間と空間が明確に分離されていないので, ニュートン極限は, 必ずしも自明ではない. そこで今から初期値問題としてのアインシュタイン方程式を考えることにする.

まず, 式 (1-54) を満たす時空を考える. これは, 座標系と無関係に存在するはずである. この時空に, どのような時間座標と空間座標を設定するかは一般相対性原理によれば, 各人の自由である. そこで, まず時間座標 t を考えよう. $t=$一定の点の集合は 3 次元空間になるはずである.

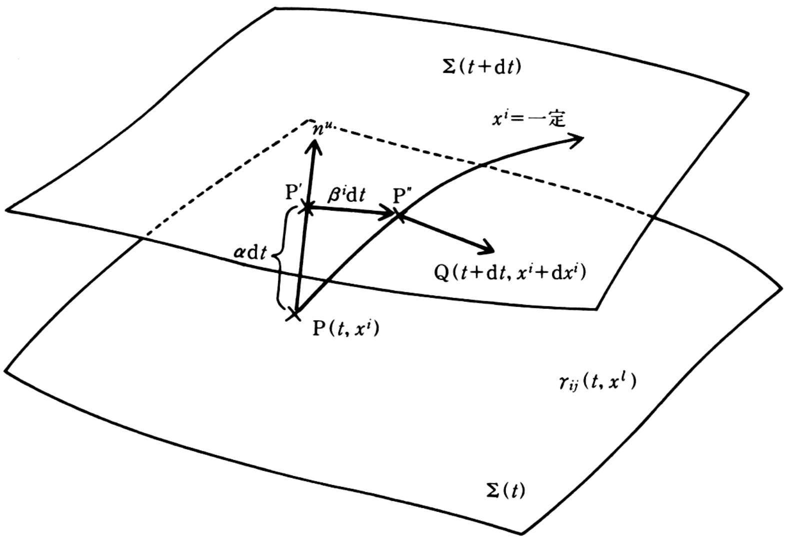


図 1-4　ラプス関数 α とシフトベクトル β^i

この 3 次元空間を超曲面 (hypersurface) と呼ぶが, それに名を付けて $\Sigma(t)$ と呼ぼう. 次に t が $t+\mathrm{d}t$ になった時, つまり時間が $t+\mathrm{d}t$ である点の集合を超曲面 $\Sigma(t+\mathrm{d}t)$ と呼ぼう. ここで注意することは, この時点では, 時間 t がどういうものかまだ何も言っていない点である. $\Sigma(t)$ は一般的な 3 次元空間であって, $\Sigma(t)$ 上の 2 点間の線素 $\mathrm{d}l^2$ は時間 t と空間座標 x^l に依存する計量テンソル $\gamma_{ij}(t,\ x^l)$ $(i,\ j=1,\ 2\ ,3)$ を用いて

$$\mathrm{d}l^2=\gamma_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \tag{1-55}$$

と書けるはずである. $\Sigma(t)$ 上の一点 P を考えよう. 点 P で $\Sigma(t)$ の法線を考えることができる. 点 P での法線の延長は, 超曲面 $\Sigma(t+\mathrm{d}t)$ と点 P′ で交わる. $\overrightarrow{\mathrm{PP'}}$ の長さ (固有時間) は, $\mathrm{d}t\to 0$ の極限では, $\mathrm{d}t$ に比例するはずである. つまり, α を比例係数として

$$|\overrightarrow{\mathrm{PP'}}|=\alpha\mathrm{d}t \tag{1-56}$$

と書くことができる. α は, 座標としての時間 $\mathrm{d}t$ と固有時間との関係を決める変数でラプス (lapse) 関数と呼ぶ. 逆にラプス関数を与えるとどういう座標時間を与えたのかを決めたことになる. そういう意味で, α は, 一般相対性理論での時間座標の与え方の自由度を一つの関数で幾何学的に明確に表したものとなっている. 点 P の空間座標を x^i とする. $\Sigma(t+\mathrm{d}t)$ では線素 $\mathrm{d}l^2(t+\mathrm{d}t)$ は

$$\mathrm{d}l^2(t+\mathrm{d}t)=\gamma_{ij}(t+\mathrm{d}t,\ x^l)\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \tag{1-57}$$

となる．$\Sigma(t+\mathrm{d}t)$ で点 P と空間座標 x^i が同じである点 P″ は，一般に点 P′ で同一であるとは限らない．これは，$\Sigma(t)$ と $\Sigma(t+\mathrm{d}t)$ での空間座標の取り方の自由度に対応している．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{P'P''}}$ は，$\mathrm{d}t\to 0$ で，$\mathrm{d}t$ に比例すべきであるから比例係数を β^i として

$$\overrightarrow{\mathrm{P'P''}} = \beta^i \mathrm{d}t \tag{1-58}$$

と書くことができる．β^i はシフトベクトル (shiftvector) と呼ばれている．β^i は空間座標一定の曲線が，法線からどれだけシフトしているかを表している．β^i は明らかに空間座標の選び方の自由度を表現している 3 つの関数になっている．α と β^i と γ_{ij} を使うと，$\Sigma(t)$ 上の任意の点 $\mathrm{P}(t,\ x^i)$ と $\Sigma(t+\mathrm{d}t)$ 上の点 $\mathrm{Q}(t+\mathrm{d}t,\ x^i+\mathrm{d}x^i)$ の距離は，$\overrightarrow{\mathrm{PP'}}$ の方向が時間的な方向であることに注意すると

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 &= -(\overrightarrow{\mathrm{PP'}})^2 + (\overrightarrow{\mathrm{P'Q}})^2\\ &= -\alpha^2\mathrm{d}t^2 + \gamma_{ij}(\mathrm{d}x^i + \beta^i\mathrm{d}t)(\mathrm{d}x^j + \beta^j\mathrm{d}t)\end{aligned} \tag{1-59}$$

となる．(1-59) は 4 次元的には $\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu$ であるから，$g_{\mu\nu}$ が

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta_i\beta^i & \beta_j \\ \beta_i & \gamma_{ij} \end{pmatrix} \tag{1-60}$$

$$\beta_i = \gamma_{ij}\beta^j \tag{1-61}$$

と表現されることを意味する．また，反変計量テンソル $g^{\mu\nu}$ は

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\alpha^2} & \dfrac{\beta^j}{\alpha^2} \\ \dfrac{\beta^i}{\alpha^2} & \gamma^{ij} - \dfrac{\beta^i\beta^j}{\alpha^2} \end{pmatrix} \tag{1-62}$$

となる．ここで γ^{ij} は

$$\gamma^{ij}\gamma_{jk} = \delta^i{}_k \tag{1-63}$$

で定義される．ラプス関数 α とシフトベクトル β^i は時間座標と空間座標の取り方の自由度に対応するもので，任意に取ることができる．例えば $\alpha=1$ とすることができるが，この場合には $\Sigma(t)$ の法線に沿って運動する仮想的な観測者の時計 (固有時間) を時間座標として採用することになる．また $\beta^i=0$ とすると，空間座標一定の曲線が法線と一致するように，空間座標を選んだことになる．規格化 $(n^\mu n_\mu = -1)$ された法線ベクトルは，

$$\begin{aligned} n_\mu &= (-\alpha,\ 0,\ 0,\ 0)\\ n^\mu &= \left(\frac{1}{\alpha},\ -\frac{\beta^i}{\alpha}\right)\end{aligned} \tag{1-64}$$

で与えられる．いま，時間方向と空間方向を明確に区別するために空間方向への射影テンソル $P_{\mu\nu}$ を

$$P_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu \tag{1-65}$$

あるいは

$$P^{\nu}{}_{\mu} = \delta^{\nu}{}_{\mu} + n^{\nu} n_{\mu}$$

で定義する. $P_{\mu\nu}$ を使うと任意のベクトル V_{ν} を空間方向に射影することができる. すなわち

$$\widetilde{V}_{\mu} \equiv P_{\mu}{}^{\nu} V_{\nu} \tag{1-66}$$

で $\widetilde{V}_{\mu}$ を定義すると

$$n^{\mu} \widetilde{V}_{\mu} = 0 \tag{1-67}$$

であることが容易に証明できる. 任意のテンソル $T_{\mu\nu\rho\sigma\cdots}$ に対しては

$$\widetilde{T}_{\mu\nu\rho\sigma\cdots} = P_{\mu}{}^{\alpha} P_{\nu}{}^{\beta} P_{\rho}{}^{\gamma} P_{\sigma}{}^{\delta} \ \cdots \ T_{\alpha\beta\gamma\delta\cdots} \tag{1-68}$$

とすればよい. 例として n_{μ} の共変微分 $n_{\mu;\nu}$ を考える. $n_{\mu;\nu}$ を空間方向に射影したものを第二基本形式または外部曲率 (Extrinsic Curvature) K_{ij} と呼ぶが,

$$K_{ij} \equiv -P_{i}{}^{\mu} P_{j}{}^{\nu} n_{\mu;\nu} \tag{1-69}$$

がその定義である. (1-64) を使って K_{ij} がどのように書かれるか見てみよう.

$$\begin{aligned}
K_{ij} &= -(\delta_{i}{}^{\mu} + n_{i} n^{\mu})(\delta_{j}{}^{\nu} + n_{j} n^{\nu}) n_{\mu;\nu} \\
&= n_{i;j} \\
&= \Gamma^{\alpha}_{\ ij} n_{\alpha} \\
&= \Big(\frac{1}{\alpha} \Gamma_{0,ij} - \frac{\beta^{k}}{\alpha} \Gamma_{k,ij} \Big) \\
&= \frac{1}{2\alpha} \Big(\big(\frac{\partial \beta_{i}}{\partial x^{j}} + \frac{\partial \beta_{j}}{\partial x^{i}} - \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} \big) - 2\beta^{k} \Gamma_{k,ij} \Big) \\
&= \frac{1}{2\alpha} \Big(- \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} + \beta_{i|j} + \beta_{j|i} \Big)
\end{aligned} \tag{1-70}$$

ここで $|$ は 3 次元計量テンソル γ_{ij} での共変微分を意味する. K_{ij} は微分幾何学的には, 3 次元空間 $\sum(t)$ が 4 次元空間にどのようにして埋め込まれているかを表すものであるが, 式 (1-70) より基本的には γ_{ij} の時間微分であることがわかる. 式 (1-70) は普通

$$\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} = -2\alpha K_{ij} + \beta_{i|j} + \beta_{j|i} \tag{1-71}$$

と書くことが多い.

さて, アインシュタイン方程式を初期値問題として考えるためにアインシュタイン方程式 (1-54) を時間方向と空間方向に射影することを考える. 式 (1-54) は 2 階のテンソルの式であるから射影の仕方は 3 通りある. 1) 両方の添字を時間方向にする. 2) 片方を時間方向, もう一方を空間方向にする. 3) 両方とも空間方向に射影する. それぞれに対応して

$$1) \quad G_{\mu\nu} n^{\mu} n^{\nu} = 8\pi \rho_{\mathrm{H}} \equiv 8\pi T_{\mu\nu} n^{\mu} n^{\nu} \tag{1-72}$$

$$2) \quad G_{\mu\nu} n^{\mu} P_{i}{}^{\nu} = -8\pi J_{i} \equiv 8\pi T_{\mu\nu} n^{\mu} P_{i}{}^{\nu} \tag{1-73}$$

$$3) \quad G_{\mu\nu} P_{i}{}^{\mu} P_{j}{}^{\nu} = 8\pi S_{ij} \equiv 8\pi T_{\mu\nu} P_{i}{}^{\mu} P_{j}{}^{\nu} \tag{1-74}$$

となる. $\rho_{\rm H}$ と J_i は, 式 (1-72) ~ (1-73) で定義されているが, それぞれの物理的な意味は, 仮想的に 4 元速度 n^μ を持った観測者の測定するエネルギー密度と運動量密度である. また S_{ij} は圧力テンソルに対応する.

さて, 我々は α, β^i と γ_{ij} を変数にとっているのだから式 (1-72) ~ (1-74) の左辺を α, β^i と γ_{ij} で表現したい. これは少しやっかいな計算であるので, 付録 a で示している.

結果は (1-72) が

$$
{}^{(3)}R + K^2 - K_{ij}K^{ij} = 16\pi\rho_{\rm H} \tag{1-75}
$$

(1-73) が

$$
K_i{}^j{}_{|j} - K_{|i} = 8\pi J_i \tag{1-76}
$$

(1-74) が

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}K_{ij} = \alpha({}^{(3)}R_{ij} + KK_{ij}) - 2\alpha K_{il}K^l{}_j \\
-8\pi\alpha(S_{ij} + \frac{1}{2}\gamma_{ij}(\rho_H - S^l{}_l)\ ) - \alpha_{|ij} \\
+\beta^m{}_{|j}K_{mi} + \beta^m{}_{|i}K_{mj} + \beta^m K_{ij|m}
\end{aligned} \tag{1-77}
$$

となる. ここで K は, K_{ij} のトレース $\gamma^{ij}K_{ij}$ である. また ${}^{(3)}R_{ij}$ と書いたのは, γ_{ij} に関するリッチテンソルであり, ${}^{(3)}R = \gamma^{ij\,(3)}R_{ij}$ はスカラー曲率である.

まず, 式 (1-75) と (1-76) は時間微分を含んでいない. 式 (1-75) はハミルトニアン拘束方程式, また式 (1-76) は運動量拘束方程式と呼ばれている [Arnowitt, Deser and Misner 1962]. 式 (1-75)~(1-77) をアインシュタイン方程式の (3+1) 次元形式と呼ぶ. 式 (1-77) は K_{ij} の時間について 1 階の微分方程式であるが, K_{ij} に関する式 (1-70) を考えるなら, γ_{ij} の時間についての 2 階の微分方程式である. 式 (1-77) をこのように考えると, 結局 10 本の方程式であったアインシュタイン方程式は時間微分を含まない 4 つの拘束方程式 (式 (1-75), (1-76)) と γ_{ij} の時間について 2 階の微分方程式 6 本 (式 (1-77)) に分解されたわけである. また, 10 個の成分を持つ計量テンソル $g_{\mu\nu}$ は 6 つの時間一定の超曲面の計量テンソル γ_{ij} と座標変換の自由度をあからさまに表現する 4 つの関数 α と β^i に分解されたわけである.

与えられた初期データに対して, 式 (1-75), (1-76), (1-77), と (1-71) を解いていけばアインシュタイン方程式を解いたことになるが, それでは, ニュートン的な世界を決定したときの流体力学の方程式は, どこへ行ってしまったのだろうか? 一般相対性理論はニュートン力学を含んでいるはずだが, 式 (1-75), (1-76), (1-77), (1-71) ではニュートン力学がどのように含まれているのか, あまり明らかではない. 答を解くヒントはビアンキ恒等式 ($G_\mu{}^\nu{}_{;\nu} \equiv 0$) より導かれる流体の運動方程式

$$
T_\mu{}^\nu{}_{;\nu} = 0 \tag{1-78}
$$

にある. これが流体力学の方程式になる.

ところで, アインシュタイン方程式の (3+1) 次元表現で現れたのは, $\rho_{\rm H}$, J_i, S_{ij} といった量であった. そこで, 流体力学の式をこれらの変数で表現してみよう. 具体的な導出は付録 b で行う

が, そのためには, まず $T_{\mu\nu}$ を $\rho_{\rm H}$, J_i, S_{ij} で表現する必要がある. それは

$$\begin{aligned}T_{\mu\nu} &= g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}T^{\alpha\beta} \\ &= (P_{\mu\alpha} - n_\mu n_\alpha)(P_{\nu\beta} - n_\nu n_\beta)T^{\alpha\beta} \\ &= \rho_{\rm H} n_\mu n_\nu + J_\mu n_\nu + J_\nu n_\mu + S_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{1-79}$$

のようにできる. アインシュタイン方程式の時と同様にして式 (1-78) で ${T_\mu}^\nu$ に式 (1-79) の表式を代入した式を n^μ と ${P_i}^\mu$ で射影する. すなわちまず

$$n^\mu {T_\mu}^\nu{}_{;\nu} = 0 \tag{1-80}$$

より

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{\gamma}\rho_{\rm H}\right) + \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{\gamma}\rho_{\rm H}V^l\right) \\ &\quad = -\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{\gamma}p(V^l + \beta^l)\right) + \alpha\sqrt{\gamma}pK - \frac{\partial \alpha}{\partial x^l}\sqrt{\gamma}J^l \\ &\qquad +\alpha\sqrt{\gamma}J^l J^m K_{lm}/(\rho_{\rm H} + p) \quad ,\end{aligned} \tag{1-81}$$

ここで

$$V^l = \frac{\alpha J^l}{(p + \rho_{\rm H})} - \beta^l = \frac{u^l}{u^0} \tag{1-82}$$

であり, γ は γ_{ij} の行列式である. また, $T_{\mu\nu}$ としては完全流体を仮定した. すなわち

$$T_{\mu\nu} = (\rho(1+\epsilon) + p)u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu},$$

ここで ρ, ϵ, p の意味は局所ローレンツ系でしかも流体が静止している系にローレンツ変換した時の物質の密度, 単位質量当たりの内部エネルギーと等方な圧力になる. 次に

$${P_i}^\mu {T_\mu}^\nu{}_{;\nu} = 0 \tag{1-83}$$

より

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{\gamma}J_i\right) + \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{\gamma}J_i V^l\right) &= -\alpha\sqrt{\gamma}\frac{\partial p}{\partial x^i} - \sqrt{\gamma}(p + \rho_{\rm H})\frac{\partial \alpha}{\partial x^i} \\ &\quad + \frac{1}{2}\alpha\sqrt{\gamma}\frac{\partial \gamma_{kl}}{\partial x^i}\frac{J^k J^l}{(p+\rho_{\rm H})} + \sqrt{\gamma}J_l\frac{\partial \beta^l}{\partial x^i}\end{aligned} \tag{1-84}$$

となる. 式 (1-81) はニュートン力学でのエネルギー方程式 (1-31) に対応するもので, また式 (1-84) はニュートン力学での運動方程式 (1-28) に対応する. そうすると, 対応関係からは α があたかも重力ポテンシャルのような役割をしているが, これはニュートン極限から考えても自然なことである. 粒子数保存式 (1-22) は,

$$(\rho u^\mu)_{;\mu} = 0 \tag{1-85}$$

となるが, これは

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{\gamma}\alpha u^0\rho)+\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{\gamma}\alpha u^0\rho V^l)=0 \tag{1-86}$$

となる. ここで 4 元速度の規格化 $(u^\mu u_\mu=-1)$ より

$$\alpha u^0=\frac{(p+\rho_H)}{\sqrt{(p+\rho_{\rm H})^2-J_lJ^l}} \tag{1-87}$$

である. (3+1) 次元形式での流体力学を完結するにはニュートン力学と同様に状態方程式 (1-47)

$$p=p(\epsilon,\ \rho) \tag{1-88}$$

が必要になる.

ここで一見奇妙な事態が発生した. アインシュタイン方程式 (1-54) はもともと 10 本の式で, それを (3+1) 次元形式にしたときにすでに 10 本の式 ((1-75), (1-76), (1-77)) が存在している. いま, ビアンキ恒等式を使って 4 本の流体の式 (1-81) と (1-84) を導いた. そうすると全部で 14 本の式ができたから, これは多すぎるのではないか? 何か間違ったことをしたのだろうか. この問題は実は重力波の存在と関わった問題なのである.

アインシュタイン方程式を初期値問題として解くことを考えよう. まず, 任意の時間一定の超曲面 $\Sigma(t_0)$ を設定しよう. 次にこの超曲面上で物質を分布させよう. すなわち $\rho,\rho_{\rm H}$ と J_i を与えよう. $\rho,\rho_{\rm H}$ と J_i の与え方は任意である. そうすると S_{ij} は状態方程式から決まるはずである. すなわち

$$S_{ij}=\frac{J_iJ_j}{(\rho_{\rm H}+p)}+p\gamma_{ij} \tag{1-89}$$

次に γ_{ij} と K_{ij} は t_0 でどのように与えればよいだろうか. γ_{ij} と K_{ij} は 3 次元空間の計量テンソルとその時間微分のようなものだから (式 (1-71)), 任意に与えてもよいと思うかもしれない. しかし, ハミルトニアン拘束方程式 (1-75) と運動量拘束方程式 (1-76) は, $\rho_{\rm H}$ と J_i が与えられると, γ_{ij} と K_{ij} に 4 つの関係式がいつでも成立していなければならないことを示している. これが, そもそも拘束方程式と呼ばれる理由である. したがって, 2 つの対称テンソル γ_{ij} と K_{ij} の 12 個の自由度は 8 個に減らされてしまうことになる. つまり, γ_{ij} と K_{ij} は初期データといえども勝手には与えられない. さて, γ_{ij} と K_{ij} が与えられた $\rho_{\rm H}$ と J_i に対して式 (1-75) と (1-76) を満足するようにしたとしよう. 次に必要なのは, α と β^i で表される時間座標と空間座標の取り方である. さてこれも何らかの方式で決めたとしよう. すると, $\Sigma(t_0+\Delta t)$ 上での γ_{ij} は式 (1-71) を, また K_{ij} は式 (1-77) を, そして $\rho_{\rm H}$ は式 (1-81) を J_i は式 (1-84) を解けば決定できる. すなわち $\Sigma(t_0)$ でのデータをもとに少し時間の進んだ $\Sigma(t_0+\Delta t)$ での物理量を決定できる. そこで $\Sigma(t_0+\Delta t)$ で再び α と β^i を決めれば, さらに $\Sigma(t_0+2\Delta t)$ での γ_{ij}, K_{ij}, $\rho_{\rm H}$, J_i を決定できる. これを続けていけば原理的には任意の $\Sigma(t)$ での解が決まる. つまり, ニュートン力学と同様に, 一般相対性理論でも初期値問題は解けることを意味する. しかしながら, 式 (1-75) と (1-76) の拘束方程式は, $\Sigma(t_0)$ では解いたがその後は解いていない. すると式 (1-75) と (1-76) はひょっとして $\Sigma(t\geq t_0)$ では満足されていないかもしれない. 今からこの問題を考えよう.

いま $A_{\mu\nu}$ を

$$A_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu} - 8\pi T_{\mu\nu} \tag{1-90}$$

で定義しよう. $A_{\mu\nu} = 0$ がアインシュタイン方程式であるが, $A_{\mu\nu}$ をエネルギー運動量テンソル (1-78) の (3+1) 分解の時と同様にして $n^\mu n^\nu$, $n^\mu P_\alpha{}^\nu$, $P_\alpha{}^\mu P_\beta{}^\nu$ をかけて時間方向と空間方向に射影してみよう. それらを H, H_α と $H_{\alpha\beta}$ とする. すなわち

$$H \equiv n^\mu n^\nu A_{\mu\nu} \tag{1-91}$$

$$H_\alpha \equiv -n^\mu P_\alpha{}^\nu A_{\mu\nu} \tag{1-92}$$

$$H_{\alpha\beta} \equiv P_\alpha{}^\mu P_\beta{}^\nu A_{\mu\nu} \tag{1-93}$$

となる.

$H = 0$ がハミルトニアン拘束方程式で $H_\alpha = 0$ が運動量拘束方程式で $H_{\alpha\beta} = 0$ が K_{ij} の時間発展方程式に対応している. そこで, $A_{\mu\nu}$ を式 (1-79) と同様にして, H, H_α, $H_{\alpha\beta}$ で表現すると

$$A_{\mu\nu} = H_{\mu\nu} + n_\mu H_\nu + n_\nu H_\mu + n_\mu n_\nu H \tag{1-94}$$

となる. 流体力学の方程式を解くということは $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ であり, これとビアンキ恒等式を使うと ($G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$),

$$A^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \tag{1-95}$$

となる. ここで注意すべき点は, 我々はまだ $A_{\mu\nu} = 0$ とは仮定していない点である. そこで, K_{ij} の発展方程式を解くということは $H_{\mu\nu} = 0$ を満たしているから, 式 (1-94) の右辺第 1 項はなくなって

$$A_{\mu\nu} = n_\mu H_\nu + n_\nu H_\mu + n_\mu n_\nu H \tag{1-96}$$

となる. 式 (1-96) を (1-95) に代入し, 例によって $n^\mu, P_i{}^\mu$ をかけて, 時間方向と空間方向に射影すると, 付録 c で証明するように

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \beta^l \frac{\partial}{\partial x^l} \right) H = -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^l} (\sqrt{\gamma} H^l) + \alpha K H - 2 H^l \frac{\partial \alpha}{\partial x^l} \tag{1-97}$$

と

$$\frac{\partial H_i}{\partial t} - \beta^l H_{i|l} = \alpha K H_i + \beta_{l|i} H^l - \frac{\partial \alpha}{\partial x^i} H \tag{1-98}$$

を得る. 式 (1-97) と (1-98) は $t = 0$ で, $H = 0$, $H_i = 0$ であれば後の任意の時刻でも $H = 0$, $H_i = 0$ となることを示している. つまりハミルトニアン拘束方程式と運動量拘束方程式は $t = 0$ で満足すれば, 後の時間発展を K_{ij} の発展方程式と一般相対論的流体力学の方程式で決めても常に満たされており, 結局 (3+1) 次元形式でのアインシュタイン方程式を解いたことになるのである.

さて, ここで, 自由度の問題を考えよう. γ_{ij} と K_{ij} は, 12 個の自由度を持っていた. しかし, 4 つの拘束方程式のために自由なのは 8 個に減る. 次に座標の取り方の自由度 (α と β^i の 4 つの関数) があるため, γ_{ij} と K_{ij} に 4 つの関係式をさらに置くことができるので, 真に自由なのは残る 4 つだけになる. この 4 つは初期の $\rho_{\rm H}$ と J_i だけでは決まらない. この残った 4 つの自由度こそ, 次章で論ずる自由な場としての重力波を表しているのである.

第2章 ・ 重力波

2-1 重力波の線型理論

前章で初期値問題として考えた時のアインシュタイン方程式の中には, 初期の物質の分布では決まらない 4 つの自由度が存在していることがわかった. ここでは, その自由度を取り出してみよう. そのためには, まず物質がないとして $T_{\mu\nu}=0$ を考える. そうすると

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=0 \tag{2-1}$$

を考えることになる. いま, 計量テンソル $g_{\mu\nu}$ が, ミンコフスキー空間の計量 $\eta_{\mu\nu}$ からわずかにずれている場合を考える. すなわち

$$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+\epsilon h_{\mu\nu} \tag{2-2}$$

で, $\epsilon\ll 1$ は 計量テンソルの $\eta_{\mu\nu}$ からの揺らぎの小ささを表すパラメータとする. $\eta_{\mu\nu}$ と $h_{\mu\nu}$ はオーダー 1 の量である. また $g_{\mu\nu}$, $\eta_{\mu\nu}$, $h_{\mu\nu}$ そして ϵ も無次元量であることを注意しておく. 式 (2-1) は $g_{\mu\nu}$ について非線型な式であるが, ここでは, ϵ の 1 次に比例する量だけ取り扱う線型理論を展開する. 式 (2-1) を $h_{\mu\nu}$ で表現するためにリーマンテンソルを考える. リーマンテンソル $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ は,

$$R_{\mu\nu\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\mu\beta}}{\partial x^\nu\partial x^\alpha}+\frac{\partial^2 g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu\partial x^\beta}-\frac{\partial^2 g_{\nu\beta}}{\partial x^\mu\partial x^\alpha}-\frac{\partial^2 g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu\partial x^\beta}\right)$$
$$+\left(\Gamma_{\rho,\nu\alpha}\Gamma^\rho_{\mu\beta}-\Gamma_{\rho,\mu\alpha}\Gamma^\rho_{\nu\beta}\right) \tag{2-3}$$

であるが, クリストッフェル記号は ϵ のオーダーだから, リーマンテンソルでクリストッフェル記号の 2 次に比例する項は ϵ^2 のオーダーになるので, ϵ の 1 次の範囲ではリーマンテンソルは[1)]

$$R_{\mu\nu\alpha\beta}{}^{(1)}=\frac{\epsilon}{2}(h_{\mu\beta,\nu\alpha}+h_{\nu\alpha,\mu\beta}-h_{\nu\beta,\mu\alpha}-h_{\mu\alpha,\nu\beta}) \tag{2-4}$$

となる. ここで, カンマ (,) は共変微分ではなくて普通の偏微分を意味する. リッチテンソルを求めるには, 式 (2-4) に $g^{\mu\alpha}$ をかける必要があるが,

$$g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu}=\delta^\mu{}_\nu \tag{2-5}$$

1) ここで $R_{\mu\nu\alpha\beta}{}^{(1)}$ とは ϵ について 1 次までのリーマンテンソルであるという意味である.

より, ϵ について 1 次の範囲では,

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \epsilon h^{\mu\nu} + O(\epsilon^2) \tag{2-6}$$

となる.

ここで

$$h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}h_{\alpha\beta} \tag{2-7}$$

であり, $O(\epsilon^2)$ とは ϵ^2 以上の高次項という意味である. 式 (2-6) を見てもわかるように ϵ の 1 次までの線型理論では, $h_{\mu\nu}$ 等のテンソルの添字の上げ下げは, $\eta_{\mu\nu}$ を使って行えばよいので, 今後断りなく添字の上げ下げを $\eta_{\mu\nu}$ で行うことにする. 式 (2-6) を用いると ϵ の 1 次の範囲では, $R^{(1)}_{\nu\beta}$ は

$$R^{(1)}_{\nu\beta} = \frac{\epsilon}{2}(h^{\mu}{}_{\beta,\mu\nu} + h^{\mu}{}_{\nu,\mu\beta} - h_{\nu\beta,\mu}{}^{,\mu} - h^{\mu}{}_{\mu,\nu\beta}) \tag{2-8}$$

となる. ここで $h_{\nu\beta,\mu}{}^{,\mu} = \eta^{\mu\alpha}h_{\nu\beta,\mu\alpha} = \Box\, h_{\nu\beta}$ のことである. 式 (2-8) をさらに ν, β で縮約すると 1 次の範囲でのスカラー曲率 $R^{(1)}$ は

$$R^{(1)} = \epsilon\ (h^{\mu}{}_{\beta}{}^{,\beta}{}_{,\mu} - h^{\mu}{}_{\mu}{}^{,\beta}{}_{,\beta}) \tag{2-9}$$

となる. 添字の入れ換えをして式 (2-8) と (2-9) を (2-1) に代入して ϵ の 1 次までとるとアインシュタイン方程式は

$$h^{\rho}{}_{\mu,\rho\nu} + h^{\rho}{}_{\nu,\rho\mu} - h_{\mu\nu}{}^{,\rho}{}_{,\rho} - h^{\rho}{}_{\rho,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\big(h^{\rho}{}_{\sigma}{}^{,\sigma}{}_{,\rho} - h^{\rho}{}_{\rho}{}^{,\sigma}{}_{,\sigma}\big) = 0 \tag{2-10}$$

となる. いま, $\bar{h}_{\mu\nu}$ を

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\mu\nu} &\equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \\ h &\equiv h^{\rho}{}_{\rho} \end{aligned} \tag{2-11}$$

で定義する. 式 (2-11) の定義から

$$\bar{h} = -h\ , \qquad h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h} \tag{2-12}$$

だから, 式 (2-10) は

$$\bar{h}^{\rho}{}_{\mu,\rho\nu} + \bar{h}^{\rho}{}_{\nu,\rho\mu} - (\bar{h}_{\mu\nu})^{,\rho}{}_{,\rho} - \eta_{\mu\nu}(\bar{h}^{\rho}{}_{\sigma})^{,\sigma}{}_{,\rho} = 0 \tag{2-13}$$

となる.

式 (2-13) を簡単にするために, 調和条件

$$\bar{h}^{\rho}{}_{\mu,\rho} = 0 \tag{2-14}$$

を課す.[2] これは, 空間座標と時間座標の取り方の自由度が 4 つあるので許されることである. 式 (2-14) を (2-13) に課すと式 (2-13) は

$$\Box \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \tag{2-15}$$

となる. 式 (2-15) は波動方程式であり, 具体的には

$$\Box \bar{h}_{\mu\nu} = \Big(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Big) \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \tag{2-16}$$

である. 特に $\bar{h}_{\mu\nu}$ が t と z のみによる場合 (2-16) の一般解は $e^{\mathrm{R}}_{\mu\nu}$ と $e^{\mathrm{A}}_{\mu\nu}$ をそれぞれ 10 個の 1 変数の任意関数として

$$\bar{h}_{\mu\nu} = e^{\mathrm{R}}_{\mu\nu}(z-t) + e^{\mathrm{A}}_{\mu\nu}(z+t) \tag{2-17}$$

と書ける. 式 (2-17) は明らかに光速で伝わる波動を示している. ところで, $\bar{h}_{\mu\nu}$ には式 (2-14) の条件があったので, $e^{\mathrm{R}}_{\mu\nu}$ と $e^{\mathrm{A}}_{\mu\nu}$ の間にはそれぞれ 4 つの関係式がなくてはならない. $z-t$ と $z+t$ の関数のそれぞれについて式 (2-14) が成り立つべきであるから, 任意なのは $20-8=12$ 個の任意関数である. これは, 1-3 節で, 確認した 4 つの自由度よりも 8 個多い.

1-3 節を思い出そう. そこでは, ラプス関数とシフトベクトルを決めることが, 時間座標と空間座標の取り方と 1 対 1 に対応していることがわかった. いま, 座標条件 (式 (2-14)) をアインシュタイン方程式の (3+1) 次元形式から見てみよう. α をラプス関数, β^i をシフトベクトルとして

$$\mathrm{d}s^2 = (-\alpha^2 + \beta_i\beta^i) + 2\beta_i \mathrm{d}x^i \mathrm{d}t + \gamma_{ij}\mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j \tag{2-18}$$

であるから

$$\beta_i = \epsilon h_{0i} \tag{2-19}$$

$$\gamma_{ij} = \delta_{ij} + \epsilon h_{ij} \ , \tag{2-20}$$

$$-1 + \epsilon h_{00} = -\alpha^2 + \beta_i\beta^i \tag{2-21}$$

となる. (2-19) より β_i は ϵ の 1 次のオーダーゆえ式 (2-21) は, ϵ の 1 次の範囲では

$$\epsilon h_{00} = -2(\alpha - 1) \tag{2-22}$$

となる. つまり $(\alpha-1)$ と β_i はオーダー ϵ の量である. また,

$$h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = -h_{00} + \delta^{ij} h_{ij} = -h_{00} + h^l{}_l \tag{2-23}$$

である. 式 (2-19)〜(2-23) を用いると式 (2-14) の時間成分は

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha - 1) + \frac{\partial \beta_l}{\partial x^l} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\epsilon h^l{}_l = 0 \tag{2-24}$$

---

2) (2-14) は調和条件と呼ばれている条件の, 線型近似になっている. 調和条件とは座標のとり方 (座標条件) として $\Box x^\mu = 0$ を課すものである. そうすると $\Box x^\mu = 0$ は $\frac{\partial}{\partial x^\nu}(\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) = 0$ と同じである. 線型の範囲ではこの条件は $\bar{h}_\mu{}^\rho{}_{,\rho} = 0$ と同じであることは簡単に確められる. 調和条件の調和の意味は $\Delta\ f = 0$ を満たす関数を調和関数と呼ぶが, その 4 次元版の $\Box f = 0$ が座標条件となっているからである. 調和条件は調和ゲージとか De Donder 条件とも呼ばれる.

空間成分は

$$-\frac{\partial}{\partial t}\beta_i + \epsilon\frac{\partial}{\partial x^l}h^l{}_i - \frac{\partial(\alpha-1)}{\partial x^i} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^i}(\epsilon h^l{}_l) = 0 \tag{2-25}$$

となる．式 (2-24) と (2-25) は確かに h_{ij} が与えられた時に α と β_i を時間発展の方程式として決めることになっているが，まだ α と β_i の値を決めるには，α と β_i の初期値が不足している．式 (2-24) と (2-25)，したがって式 (2-14) では，時間座標と空間座標は，あるクラスのものにまで制限したが，まだ唯一のものに決定するには到っていない．つまりまだ座標変換の自由度が残っているのである．

この残った自由度を調べるために，さらに

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon\xi^{\mu} \tag{2-26}$$

という ϵ に比例した無限小座標変換 (またはゲージ変換) を考える．ここで ξ^{μ} は x^{μ} の任意の関数である．メトリックテンソルの座標変換は

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu}(x^{\gamma}+\epsilon\xi^{\gamma}) &= g_{\alpha\beta}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} \\ &= (\eta_{\alpha\beta}+\epsilon h_{\alpha\beta})\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} \end{aligned} \tag{2-27}$$

と書けるが，ϵ について 1 次のオーダーでは今考えている場合 ((2-2) 式)，

$$\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} = \delta^{\alpha}{}_{\mu} - \epsilon\xi^{\alpha}{}_{,\mu}, \quad g'_{\mu\nu}(x^{\gamma}+\epsilon\xi^{\gamma}) = g'_{\mu\nu}(x^{\gamma}) \tag{2-28}$$

であるので，

$$g'_{\mu\nu}(x^{\gamma}) = \eta_{\mu\nu} + \epsilon(h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu}) \tag{2-29}$$

となる．これは $h'_{\mu\nu}$ が

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} \tag{2-30}$$

と書けることを意味する．式 (2-30) のトレースをとることにより

$$\bar{h}' = \bar{h} - 2\xi^{\mu}{}_{,\mu} \tag{2-31}$$

を得る．式 (2-31) を用いると

$$\bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - (\xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu} - \eta_{\mu\nu}\xi^{\rho}{}_{,\rho}) \tag{2-32}$$

となる．したがって，ϵ の 1 次の範囲では

$$\bar{h}'^{\rho}_{\mu,\,\rho} = \bar{h}_{\mu}{}^{\rho}{}_{,\rho} - \xi_{\mu}{}^{,\rho}{}_{,\rho} \tag{2-33}$$

であるから，

$$\Box\xi_{\mu} = 0 \tag{2-34}$$

を満足する無限小座標変換に対しては式 (2-14) の座標条件は変わらない．式 (2-34) を満たす ξ^μ が求めていた残っている座標変換の自由度であったわけである．

ここで簡単のため単色平面波を考えよう．すなわち μ, ν について対称な偏光テンソル $e_{\mu\nu}$ を用いて

$$h_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha} \tag{2-35}$$

と表現する．式 (2-35) は (2-14) の座標条件を満たすべきであるから $e_{\mu\nu}$ は,

$$k_\nu e^\nu{}_\mu - \frac{1}{2} k_\mu e^\rho{}_\rho = 0 \tag{2-36}$$

を満足しなければならない．また, 式 (2-15) の解でもあるから

$$(e_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} e^\rho{}_\rho) k_\rho k^\rho = 0 \tag{2-37}$$

であるが, これは $k_\rho k^\rho = 0$ なら満たされる．次に無限小座標変換 (2-34) を考える．ξ^μ として

$$\xi^\mu = ic^\mu e^{ik_\alpha x^\alpha} \tag{2-38}$$

をとる．$k_\mu k^\mu = 0$ だからこれは式 (2-34) を満す．ここで c^μ は定数ベクトルである．式 (2-38) を (2-30) に代入して

$$e'_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} + k_\mu c_\nu + k_\nu c_\mu \tag{2-39}$$

を得る．簡単のため k^μ の空間成分の方向を z 軸の方向にとる．そうすると

$$k^1 = k^2 = 0 \ , \qquad k^0 = k^3 \equiv k > 0 \tag{2-40}$$

とできる．式 (2-39) を使って $e'_{00}, e'_{0i} = 0$ になるように c_μ を選ぶ．つまり

$$e'_{00} = e_{00} + 2k_0 c_0 = 0 \tag{2-41}$$

$$e'_{0i} = e_{0i} + k_0 c_i + k_i c_0 = 0 \tag{2-42}$$

を要求するが, これより $k_0 = -k$ に注意すると

$$c_0 = \frac{e_{00}}{2k} \ , \quad c_1 = \frac{e_{01}}{k} \ , \quad c_2 = \frac{e_{02}}{k} \ , \quad c_3 = \frac{e_{03} + kc_0}{k} \tag{2-43}$$

のように c_μ を決めればよい．

ゲージ変換 (式 (2-39)) で式 (2-36) は不変であった．そこで以後 $'$ を省略して議論する．式 (2-36) はいま式 (2-41) と (2-42) より

$$ke_{3\mu} - \frac{1}{2} k_\mu (e_{11} + e_{22} + e_{33}) = 0 \tag{2-44}$$

と書ける．ここで $\mu = 0$ とおくと $e_{30} = e_{03} = 0$ だから

$$e_{11} + e_{22} + e_{33} = 0 \tag{2-45}$$

式 (2-45) を使うと式 (2-44) は,

$$e_{3l} = 0 \tag{2-46}$$

を意味する. $l=3$ とおくと $e_{33}=0$ だから, 式 (2-45) は $e_{11}+e_{22}=0$ と変形できる. つまり, $e_{\mu\nu}$ は

$$e_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{11} & e_{12} & 0 \\ 0 & e_{12} & -e_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2-47}$$

という形にまで変形できる.

今までは, k^μ の空間成分は z 軸方向にとったが, 式 (2-47) は一般には e_{ij} が

$$\begin{aligned} e_{ij}\delta^{ij} &= 0 \qquad\qquad (\text{トレースレス}) \\ e_{ij}k^j &= 0 \qquad\qquad (\text{トランスバース}) \end{aligned} \tag{2-48}$$

になっていることを示している. 式 (2-48) のようになっている座標をトランスバース–トレースレス (Transverse–Traceless) ゲージ (今後 TT ゲージと略称する) と呼ぶ. $e_{0\mu}$ は, (3+1) 次元形式ではもともと座標変換の自由度に対応していたのだから, 真の物理量と関係のないことは明らかである. 結局 e_{11} と e_{12} のみが, 座標変換で消し去ることのできないものとして残った. この e_{11} と e_{12} を重力波と呼ぶ. 重力波の自由度は 2 になったように思うかもしれないが, 式 (2-35) では $e_{\mu\nu}$ は本当は複素数で, $h_{\mu\nu}$ を与える時には,

$$h_{\mu\nu} = \mathrm{Re}(e_{\mu\nu}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\alpha x^\alpha}) \tag{2-49}$$

$$\dot{h}_{\mu\nu} = -k_0 \mathrm{Im}(e_{\mu\nu}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\alpha x^\alpha})$$

と考えるべきであるから, 結局 4 つの自由度が残っていることになる. これは 1-3 節の一般論と合致する.

式 (2-48) の結果は, アインシュタイン方程式の (3+1) 次元形式で考えた方がすっきりするかもしれない. $\rho_{\mathrm{H}} = J_i = S_{ij} = 0$ として, $\alpha = 1$, $\beta^i = 0$ の座標条件を与えると (3+1) 次元形式でのアインシュタイン方程式は

$${}^{(3)}R + K^2 - K_{ij}K^{ij} = 0 \tag{2-50}$$

$$K_i{}^j{}_{|j} - K_{|i} = 0 \tag{2-51}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}K_{ij} = {}^{(3)}R_{ij} + KK_{ij} - 2K_{il}K^l{}_j \tag{2-52}$$

$$\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} = -2K_{ij} \tag{2-53}$$

となる．いま

$$\gamma_{ij} = \delta_{ij} + \epsilon h_{ij} \tag{2-54}$$

とする．式 (2-53) より K_{ij} は ϵ の 1 次オーダーである．したがって式 (2-50) では K^2 と $K_{ij}K^{ij}$ は ϵ の 2 次のオーダーだから, ϵ の 1 次のオーダーでは,

$$^{(3)}R = 0 \tag{2-55}$$

また, 式 (2-52) でも KK_{ij} と $K_{il}K^l{}_j$ は 2 次のオーダーゆえ,

$$\frac{\partial K_{ij}}{\partial t} = {}^{(3)}R_{ij} \tag{2-56}$$

となる．式 (2-56) のトレースをとると ϵ の 1 次のオーダーで

$$\frac{\partial K}{\partial t} = {}^{(3)}R = 0 \tag{2-57}$$

$^{(3)}R_{ij}$ の表式 (式 (2-8) を 3 次元で考えればよい) を代入すると, ϵ の 1 次のオーダーでは

$$\frac{\partial K_{ij}}{\partial t} = \frac{\epsilon}{2}(h_i{}^k{}_{,kj} + h_j{}^k{}_{,ki} - h_{ij}{}^{,l}{}_{,l} - h^l{}_{l,ij}) \tag{2-58}$$

ここで, 次式の単色平面波を考えよう．

$$h_{ij} = e_{ij}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_l x^l + k_0 t)} \tag{2-59}$$

式 (2-53) より

$$K_{ij} = -\frac{\epsilon e_{ij}}{2} i k_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_l x^l + k_0 t)} \tag{2-60}$$

式 (2-57) に代入して

$$e^i{}_i = 0 \tag{2-61}$$

すなわち h_{ij} はトレースレスである．式 (2-60) を (2-51) に代入すると

$$\frac{\epsilon}{2} e_i{}^j k_j k_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_l x^l + k_0 t)} = 0 \tag{2-62}$$

すなわち

$$e_i{}^j k_j = 0 \tag{2-63}$$

だから h_{ij} はトランスバースである．式 (2-61), (2-63) を使うと式 (2-58) は

$$(-k_0^2 + k_l k^l)\epsilon e_{ij}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_l x^l + k_0 t)} = 0 \tag{2-64}$$

つまり

$$k_0^2 = k_l k^l \tag{2-65}$$

を意味する．念のため式 (2-55) をチェックすると式 (2-9) よりトランスバースでトレースレスなら成立していることがわかる．任意の解 h_{ij} は線型の範囲では重ね合わせが効いて

$$h_{ij} = \int e_{ij}(\mathbf{k}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_l x^l + k_0 t)} \mathrm{d}^3\mathbf{k} \tag{2-66}$$

と書き表せる．したがって $h_{0\mu} = 0$ という座標条件の下では h_{ij} はトランスバース–トレースレス

$$h^l{}_l = 0 \ , \qquad h_i{}^j{}_{,j} = 0 \tag{2-67}$$

になることがわかる．h_{ij} は 6 つの自由度が一般にはあるが, 式 (2-67) より独立なのは 2 つである．この 2 つに対しては h_{ij} と $\dot{h}_{ij}$ を任意に与えられるから重力波は 4 つの任意関数で決まることになる．これは 1-3 節の一般論と合っている．

さて出発点の式 (2-10) の解は, 実は今論じた重力波だけではない．ニュートン極限を取るとわかるように, 質点 M のまわりの静的な解は

$$g_{00} = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \ , \qquad g_{0j} = 0 \ , \qquad g_{ij} = \delta_{ij} \tag{2-68}$$

である．いま, 質点から十分離れた距離 r_0 をとると

$$\frac{2GM}{c^2 r_0} \ll 1 \tag{2-69}$$

とすることができる． 例えば $M = M_\odot$ なら $r_0 \gg 3$ km とすればよい． そうすると $\epsilon \equiv 2GM/c^2 r_0 \ll 1$ として

$$g_{00} = -1 + \epsilon \frac{r_0}{r} \tag{2-70}$$

と書ける．これは式 (2-68) が

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu} \tag{2-71}$$

という形をしていることを示している．つまりこのような静的な成分も式 (2-10) の解の中に含まれている．さらに, 任意の座標条件の下で任意の解 $h_{\mu\nu}$ が与えられた時は単なる座標変換の自由度もその中に入っているので, 重力波と考えられる TT 成分だけを取り出す必要が出てくる．このためにはどうすればよいか考えよう．まず無限小座標変換 (2-30) を行って $h'_{0\mu} = 0$ とする．

$$0 = h'_{00} = h_{00} - 2\frac{\partial \xi_0}{\partial t} \tag{2-72}$$

$$0 = h'_{0i} = h_{0i} - \frac{\partial \xi_i}{\partial t} - \frac{\partial \xi_0}{\partial x^i} \tag{2-73}$$

式 (2-72) で ξ_0 が決まり, その ξ_0 を使うと式 (2-73) より ξ_i が決まって確かに $h'_{0\mu} = 0$ とできる． このようにしたとして以後 $'$ は使わないとする． そうすると問題は 2 階のテンソル h_{ij} $(i,\ j = 1,2,3)$ が与えられた時, TT 成分をどう決めるかという問題に帰する．これには一般定理があって任意の h_{ij} は

$$h_{ij} = h_{ij}^{\mathrm{TT}} + \left(W_{i,j} + W_{j,i} - \frac{2}{3}\delta_{ij} W^l{}_{,l}\right) + \frac{\delta_{ij}}{3} h^l{}_l \tag{2-74}$$

$$\delta^{lm} h_{il,m}^{\mathrm{TT}} = 0 \ \ , \ \ \delta^{ij} h_{ij}^{\mathrm{TT}} = 0 \tag{2-75}$$

と分解できる．ここで $h_{ij}^{\rm TT}$ は TT 成分, W_i は縦波を表すベクトルで $h^l{}_l$ はトレース部分である．まず, W_i が求められることを示そう．$\tilde{h}_{ij} \equiv h_{ij} - \delta_{ij} h^l{}_l/3$ を定義すると, 式 (2-74) は

$$W_{i,j} + W_{j,i} - \frac{2}{3}\delta_{ij} W^l{}_{,l} = \tilde{h}_{ij} - h_{ij}^{\rm TT} \tag{2-76}$$

と書ける．(2-76) の発散をとると, TT 成分は落ちて

$$\Delta W_i + \frac{1}{3}(W^l{}_{,l})_{,i} = \tilde{h}_i{}^j{}_{,j} \tag{2-77}$$

となる．式 (2-77) は W_i のカップルした式であるが, (2-77) の発散をとると

$$\Delta\ (W^l{}_{,l}) = \frac{3}{4}\tilde{h}^{ij}{}_{,ji} \tag{2-78}$$

となる．したがってまず, 与えられた $\tilde{h}_{ij}$ に対して式 (2-78) のポアッソン方程式を解くと $W^l{}_{,l}$ が決まる．次に求められた W^l の発散を式 (2-77) に代入すると

$$\Delta W_i = \tilde{h}_i{}^j{}_{,j} - \frac{1}{3}(W^l{}_{,l})_{,i} \tag{2-79}$$

となるが, このポアッソン方程式を解くと W_i が決まる．W_i が決まると式 (2-76) に戻って

$$h_{ij}^{\rm TT} = \tilde{h}_{ij} - (W_{i,j} + W_{j,i} - \frac{2}{3}\delta_{ij} W^l{}_{,l}) \tag{2-80}$$

より, TT 成分が決定されることになる．逆に言えばポアッソン方程式 (2-78),(2-79) が一意的な解を持つことが式 (2-74),(2-75) のような分解が一意的であることと等価だということを意味している．

一般の場合には, TT 成分を引き出すのはこのように大変であるが, 平面波の時はもう少し簡単になる．波数ベクトルを $\mathbf{k}$ とするとすべての空間微分は $\mathbf{ik}$ をかけることになる．そこで,

$$n_i = \frac{k_i}{k} \tag{2-81}$$

とおくと, 任意のベクトルをトランスバースにする射影テンソル P_{ij} は

$$P_{ij} = \delta_{ij} - n_i n_j \tag{2-82}$$

になる．実際任意のベクトルを Q_j とした時

$$\widetilde{Q}_i = P_i{}^j Q_j \tag{2-83}$$

は n^i に垂直であることがわかる．したがって与えられた h_{ij} に対して

$$h_{ij}^T = P_i{}^l P_j{}^m h_{lm} \tag{2-84}$$

はトランスバースである．$P_i{}^l P_{lj} = P_{ij}$, $P^l{}_l = 2$ に注意するとトレースレスにするには

$$h_{ij}^{\rm TT} = P_i{}^l P_j{}^m h_{lm} - \frac{P_{ij}}{2}(P^{lm} h_{lm}) \tag{2-85}$$

とすればよいことがわかる．重力波の源から十分離れた場合, 平面波近似は十分よいと考えられるので, 現実的には式 (2-85) の操作で TT 成分を取り出すことが可能である．実際以後でも TT 成分という場合式 (2-85) の操作を意味することが多い．式 (2-85) はもちろん, 式 (2-80) を平面波の時に適用しても得られる．

さて, TT 成分が何故重要なのだろう．TT ゲージで式 (2-85) のようにしたとしても計量テンソルは適当な座標変換で, いつでもある一点では $\eta_{\mu\nu}$ にできたから, 意味がないのではないかと思うかもしれない．しかし, そうであろうか．そのためにはリーマンテンソルを考える必要がある．リーマンテンソルは ϵ の 1 次のオーダーでは式 (2-4) となる．

$$R^{(1)}_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{\epsilon}{2}(h_{\mu\beta,\nu\alpha} + h_{\nu\alpha,\mu\beta} - h_{\nu\beta,\mu\alpha} - h_{\mu\alpha,\nu\beta}) \tag{2-86}$$

式 (2-86) は, 無限小座標変換 (ゲージ変換) (式 (2-30)) を行っても値が変わらないことがわかる．これは簡単に確かめられる．このような性質を持つ量をゲージ不変量という．ゲージ変換で変わらないのだから, まさしく物理的に意味のある量になっている．いま, z 方向に進む平面波を考えるとリーマンテンソルも, $t-z$ の関数

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\mu\nu\alpha\beta}(t-z) \tag{2-87}$$

と考えられる．リーマンテンソルは一般には 20 個の独立成分を持つが, 今の場合いくつが独立か調べてみる．ビアンキの恒等式 $R_{\mu\nu\alpha\beta;\gamma} + R_{\mu\nu\gamma\alpha;\beta} + R_{\mu\nu\beta\gamma;\alpha} = 0$ を i) $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 0$, ii) $\alpha = 1$, $\beta = 3$, $\gamma = 0$, iii) $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = 0$ に適用してみると

$$\text{i)} \quad R_{\mu\nu12,0} = 0 \tag{2-88}$$

$$\text{ii)} \quad R_{\mu\nu13,0} + R_{\mu\nu01,3} = 0 \tag{2-89}$$

$$\text{iii)} \quad R_{\mu\nu23,0} + R_{\mu02,3} = 0 \tag{2-90}$$

となる．式 (2-88)〜(2-90) からは $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ は定数ではないので,

$$R_{\mu\nu12} = 0 \tag{2-91}$$

$$R_{\mu\nu13} = -R_{\mu\nu10} \tag{2-92}$$

$$R_{\mu\nu23} = -R_{\mu\nu20} \tag{2-93}$$

が得られる．リーマンテンソルには $R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu}$ という性質があったから式 (2-91) より $R_{12\mu\nu} = 0$ である．また, $R_{13\mu\nu} = R_{\mu\nu13} = -R_{\mu\nu10}$ である．$R_{\mu\nu10}$ の μ,ν が 1, 2 のペアなら, 式 (2-91) より零であり, 1, 3 とか 2, 3 のペアなら式 (2-92) を使って $R_{1310} = R_{1013} = -R_{1010}$ となる．このようなことを繰り返すと結局独立なのは

$$R_{i0j0}(t-z) = R_{j0i0}(t-z) \tag{2-94}$$

に限られることがわかる．つまり 20 個ではなく 6 個の独立な成分しかもたない．さらに真空中のアインシュタイン方程式を考えると $R=0$ であるから，

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} = 0 \tag{2-95}$$

$R_{00}=0$ より

$$R_{3030} + R_{2020} + R_{1010} = 0 \tag{2-96}$$

$R_{03}=0$ より

$$R_{1010} + R_{2020} = 0 \tag{2-97}$$

よって

$$R_{3030} = 0 \tag{2-98}$$

$R_{01}=0$ より

$$R_{1030} = 0 \tag{2-99}$$

このようなことを続けて結局

$$R_{1010} = -R_{2020} \quad と \quad R_{1020} = R_{2010} \tag{2-100}$$

のみがゼロではないことがわかる．つまり独立な成分は 2 つになった．

TT ゲージで，リーマンテンソル R_{i0j0} は式 (2-86) より $h_{0\mu}=0$ であるから

$$R_{i0j0} = -\frac{\epsilon}{2}\frac{\partial^2 h_{ij}^{\mathrm{TT}}}{\partial t^2} \tag{2-101}$$

となることがわかる．R_{i0j0} は，重力波が存在する時のゼロではないゲージ不変なリーマンテンソルであり，それが式 (2-101) のように TT ゲージでの計量テンソルと結びついているのである．つまり TT ゲージでは，ゲージ不変なリーマンテンソルを取り出していたのである．逆に h_{ij}^{TT} はゲージ不変であることが証明される．平面波に対して，

$$\xi^j = -i|k|^{-1}c^j \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi} \tag{2-102}$$

なるゲージ変換を行う．ここで c^j は定数，Φ は平面波の位相で $k_i = \partial\Phi/\partial x^i$ である．そうすると式 (2-30) より

$$h'_{ij} = h_{ij} + n_i c_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi} + n_j c_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi} \tag{2-103}$$

となるが，射影テンソル P_{ij} をかけると $P_i{}^l n_l = 0$ であるため，

$$P_i{}^l P_j{}^m h'_{lm} = P_i{}^l P_j{}^m h_{lm} \tag{2-104}$$

となるからである．これで TT 成分の重要性が明らかになったと思う．

2-2　重力波の伝播

今まで, ミンコフスキー空間の揺らぎとして重力波を考えてきたが, 今からもう少し一般的な時空の揺らぎとしての重力波を考えよう. すなわち $\epsilon \ll 1$ をパラメータとして

$$g_{\mu\nu} = g_{B\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu} \tag{2-105}$$

を考えることにする. ここで $g_{B\mu\nu}$ はバックグラウンド (揺らぎのない時) の計量テンソルとする. そこで, リッチテンソル $R_{\mu\nu}$ を ϵ で展開する. すなわち

$$R_{\mu\nu} = R^{(0)}_{\mu\nu} + \epsilon R^{(1)}_{\mu\nu} + \epsilon^2 R^{(2)}_{\mu\nu} + \cdots \tag{2-106}$$

このためには, まず

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} &= {g_B}^{\mu\nu} - \epsilon h^{\mu\nu} + O(\epsilon^2) + \cdots \\ h^{\mu\nu} &= {g_B}^{\mu\alpha} {g_B}^{\nu\beta} h_{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{2-107}$$

つまり, $h_{\mu\nu}$ の添字の上げ下げは $g_{B\mu\nu}$ で行う. クリストッフェルも同様に

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha(0)}_{\beta\gamma} + \epsilon\Gamma^{\alpha(1)}_{\beta\gamma} + \cdots \tag{2-108}$$

と展開すると

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}{}^{(1)} = \frac{1}{2} {g_B}^{\alpha\rho} (h_{\rho\beta|\gamma} + h_{\rho\gamma|\beta} - h_{\beta\gamma|\rho}) \tag{2-109}$$

を得る. ここで $|$ は $g_{B\mu\nu}$ に関する共変微分である. $R^{(1)}_{\mu\nu}$ は

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} = \; & \frac{\partial}{\partial x^\rho}(\Gamma^{\rho(0)}_{\mu\nu} + \epsilon\Gamma^{\rho(1)}_{\mu\nu}) - \frac{\partial}{\partial x^\nu}(\Gamma^{\rho(0)}_{\mu\rho} + \epsilon\Gamma^{\rho(1)}_{\mu\rho}) \\ & + (\Gamma^{\rho(0)}_{\sigma\rho} + \epsilon\Gamma^{\rho(1)}_{\sigma\rho})(\Gamma^{\sigma(0)}_{\mu\nu} + \epsilon\Gamma^{\sigma(1)}_{\mu\nu}) \\ & - (\Gamma^{\sigma(0)}_{\beta\mu} + \epsilon\Gamma^{\sigma(1)}_{\beta\mu})(\Gamma^{\beta(0)}_{\sigma\nu} + \epsilon\Gamma^{\beta(1)}_{\sigma\nu}) \end{aligned} \tag{2-110}$$

より

$$R^{(1)}_{\mu\nu} = \Gamma^{\rho(1)}_{\mu\nu|\rho} - \Gamma^{\rho(1)}_{\mu\rho|\nu} \tag{2-111}$$

と書ける. 式 (2-109) を (2-111) に代入して

$$R^{(1)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} {g_B}^{\rho\alpha} \{ h_{\alpha\mu|\nu\rho} - h_{\alpha\mu|\rho\nu} + h_{\alpha\nu|\mu\rho} + h_{\mu\rho|\alpha\nu} - h_{\mu\nu|\alpha\rho} - h_{\alpha\rho|\mu\nu} \} \tag{2-112}$$

となる. ここで

$$h_{\alpha\mu|\nu\rho} - h_{\alpha\mu|\rho\nu} = R^{(0)}_{\alpha\beta\rho\nu} h^{\beta}_{\mu} + R^{(0)}_{\mu\beta\rho\nu} h^{\beta}_{\alpha} \tag{2-113}$$

に注意すると

$$R^{(1)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left({h_\nu}^{\rho}{}_{|\mu\rho} + {h_\mu}^{\rho}{}_{|\rho\nu} - h_{\mu\nu}{}^{|\rho}{}_{|\rho} - h_{|\mu\nu} + R^{(0)}_{\beta\nu} {h^\beta}_\mu + R^{(0)}_{\mu\beta\rho\nu} h^{\beta\rho} \right) \tag{2-114}$$

となる．ここで

$$h = g_B{}^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$$

右辺第 1 項で共変微分の順序を変えると

$$= \frac{1}{2}\left(h_\nu{}^\rho{}_{|\rho\mu} + h_\mu{}^\rho{}_{|\rho\nu} - h_{\mu\nu}{}^{|\rho}_{|\rho} - h_{|\mu\nu}\right)$$
$$+ R^{(0)}_{\nu\beta} h^\beta{}_\mu + R^{(0)}_{\mu\beta} h^\beta{}_\nu + \left(R^{(0)}_{\mu\beta\rho\nu} + R^{(0)}_{\nu\beta\rho\mu}\right) h^{\beta\rho} \tag{2-115}$$

式 (2-115) を縮約して

$$R^{(1)} = \left(h_\mu{}^\rho{}_{|\rho}{}^{|\mu} - h^{|\rho}_{|\rho}\right) - h^{\mu\nu} R^{(0)}_{\mu\nu} \tag{2-116}$$

したがって，アインシュタインテンソルは

$$\begin{aligned} G^{(1)}_{\mu\nu} &= R^{(1)}_{\mu\nu} - \frac{g_{B\mu\nu}}{2} R^{(1)} - \frac{h_{\mu\nu}}{2} R^{(0)} \\ &= \frac{1}{2}\Big(h_\nu{}^\rho{}_{|\rho\mu} + h_\mu{}^\rho{}_{|\rho\nu} - h_{\mu\nu}{}^{|\rho}_{|\rho} - h_{|\mu\nu} \\ &\quad - g_{B\mu\nu}\left(h_\mu{}^\rho{}_{|\rho}{}^{|\mu} - h^{|\rho}{}_{|\rho}\right) - h_{\mu\nu} R^{(0)} + g_{B\mu\nu} h^{\alpha\beta} R^{(0)}_{\alpha\beta}\Big) \\ &\quad + R^{(0)}_{\beta\nu} h^\beta{}_\mu + R^{(0)}_{\beta\mu} h^\beta{}_\nu + \left(R^{(0)}_{\mu\beta\rho\nu} + R^{(0)}_{\nu\beta\rho\mu}\right) h^{\beta\rho}) = 0 \end{aligned} \tag{2-117}$$

となる．ここで，$\bar{h}_{\mu\nu}$ を

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{g_{B\mu\nu}}{2} h \tag{2-118}$$

で定義して式 (2-117) に

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} + \frac{g_{B\mu\nu}}{2} h \tag{2-119}$$

として代入すると

$$\begin{aligned} &\bar{h}_{\mu\nu}{}^{|\rho}_{|\rho} - \bar{h}_\nu{}^\rho{}_{|\rho\nu} - \bar{h}_\mu{}^\rho{}_{|\rho\nu} + g_{B\mu\nu} \bar{h}_\sigma{}^\rho{}_{|\rho}{}^{|\sigma} \\ &+\bar{h}_{\mu\nu} R^{(0)} - g_{B\mu\nu} \bar{h}^{\alpha\beta} R^{(0)}_{\alpha\beta} - R^{(0)}_{\beta\nu} \bar{h}^\beta_\mu - R^{(0)}_{\beta\mu} \bar{h}^\beta_\nu \\ &\qquad + 2R^{(0)}_{\mu\alpha\nu\beta} \bar{h}^{\alpha\beta} = 0 \end{aligned} \tag{2-120}$$

となる．バックグラウンドが真空であると ($R^{(0)}_{\mu\nu} = 0$, $R^{(0)} = 0$), 式 (2-120) は

$$\begin{aligned} &\bar{h}_{\mu\nu}{}^{|\rho}_{|\rho} - \bar{h}_\nu{}^\rho{}_{|\rho\mu} - \bar{h}_\mu{}^\rho{}_{|\rho\nu} + g_{B\mu\nu} \bar{h}_\sigma{}^\rho{}_{|\rho}{}^{|\sigma} \\ &\qquad + 2R^{(0)}_{\mu\alpha\nu\beta} \bar{h}^{\alpha\beta} = 0 \end{aligned} \tag{2-121}$$

となる．式 (2-14) と同様にして，調和条件

$$\bar{h}_\nu{}^\rho{}_{|\rho} = 0 \tag{2-122}$$

を採用すると

$$\bar{h}_{\mu\nu}{}^{|\rho}{}_{|\rho} + 2R^{(0)}_{\mu\alpha\nu\beta}\bar{h}^{\alpha\beta} = 0 \tag{2-123}$$

となる. いま, 重力波の波長 λ が, バックグラウンドのリーマンテンソルの変化する長さ L よりも十分短いという短波長極限をとると, 式 (2-123) の第 2 項も無視してよい. これは式 (2-123) の第 2 項と第 1 項の比が

$$\frac{\lambda^2}{L^2} \ll 1 \tag{2-124}$$

となるからである. そうすると曲がった時空の中では重力波は

$$\bar{h}_{\mu\nu}{}^{|\rho}{}_{|\rho} = 0 \tag{2-125}$$

という方程式に従う. さて, $\bar{h}_{\mu\nu}$ を

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \tag{2-126}$$

という形に書いてみる. ここで ϕ は波長 λ のスケールで変化する位相であり, $A_{\mu\nu}$ はゆっくり変化する振幅である. 式 (2-126) は電磁気学で幾何光学近似をとることに対応する. 式 (2-126) を (2-125) に代入すると $k_\nu \equiv \phi_{|\nu} = O(\lambda^{-1})$ として

$$-k_\rho k^\rho A_{\mu\nu} + \mathrm{i}(2k_\rho A_{\mu\nu}{}^{|\rho} + A_{\mu\nu}k_\rho{}^{|\rho}) + A_{\mu\nu}{}^{|\rho}{}_{|\rho} = 0 \tag{2-127}$$

第 1 項は $O(\lambda^{-2})$, 第 2 項は $O(\lambda^{-1})$ そして第 3 項は $O(1)$ であるからまず $O(\lambda^{-2})$ の式から

$$k_\rho k^\rho = 0 \tag{2-128}$$

がまず出てくる. これは k_ρ がヌル (光的) であることを示している. すなわち光線と同じように重力波を考えてよいことになる. 次に式 (2-128) を共変微分してみると

$$k_{\rho|\alpha}k^\rho = k_{\alpha|\rho}k^\rho = 0 \tag{2-129}$$

となる. 第 2 の等式は, k_ρ がある関数 ϕ の勾配 $\phi_{|\rho}$ であるために成立する. すなわち

$$k_{\rho|\alpha} = k_{\alpha|\rho} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^\alpha \partial x^\rho} - \Gamma^\beta_{\alpha\rho}\frac{\partial\phi}{\partial x^\beta} \tag{2-130}$$

が成り立つからである. いま, 光線と同様にして σ をパラメータとする $x^\mu(\sigma)$ なる曲線の接線が常に k^μ になると考えると重力波線は

$$\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\sigma} = k^\mu \tag{2-131}$$

で (2-129) より

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\sigma^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\sigma}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\sigma} = 0 \tag{2-132}$$

となって測地線の方程式となる．また σ はアフィンパラメータと呼ばれる．以上わかったことは，バックグラウンドの時空の曲率が変化する長さ L に較べて，十分短い波長を持った重力波は，光線と全く同じように振る舞うということである．それでは，振幅と偏光はどうなるのであろうか．$A_{\mu\nu}$ は式 (2-126) の定義から複素数を考えるべきであるから振幅 A と偏光テンソル $e_{\mu\nu}$ を

$$A \equiv (A^*_{\mu\nu} A^{\mu\nu})^{\frac{1}{2}} \tag{2-133}$$

$$e_{\mu\nu} \equiv \frac{A_{\mu\nu}}{A} \tag{2-134}$$

で定義する．ここで $A^*_{\mu\nu}$ は $A_{\mu\nu}$ の複素共役である．まず，式 (2-122) に (2-126) を代入して

$$\mathrm{i}k^\nu A_{\mu\nu} + A_\mu{}^\nu{}_{|\nu} = 0 \tag{2-135}$$

があるが，第 1 項は λ^{-1}，第 2 項はオーダー 1 だから，まず

$$k^\nu A_{\mu\nu} = 0 \tag{2-136}$$

つまり

$$k^\nu e_{\mu\nu} = 0 \tag{2-137}$$

を得る．式 (2-127) の λ^{-1} のオーダーからは

$$A_{\mu\nu|\rho} k^\rho = -\frac{1}{2} A_{\mu\nu} k_\rho{}^{|\rho} \tag{2-138}$$

を得る．式 (2-138) は $A^*_{\mu\nu}$ についても成立する．

$$A^*_{\mu\nu|\rho} k^\rho = -\frac{1}{2} A^*_{\mu\nu} k_\rho{}^{|\rho} \tag{2-139}$$

式 (2-138) と (2-139) を使うと A^2 は

$$A^2{}_{|\rho} k^\rho = -A^2 k^\rho{}_{|\rho} \tag{2-140}$$

に従う．式 (2-140) は書き換えると

$$\begin{aligned} (A^2 k^\rho)_{|\rho} &= \frac{1}{\sqrt{-g_B}} \frac{\partial}{\partial x^\rho} (\sqrt{-g_B} A^2 k^\rho) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2-141}$$

という保存則が得られる．ここで g_B はバックグラウンド時空の計量テンソル $g_{B\mu\nu}$ の行列式である．次に $A_{\mu\nu} = A e_{\mu\nu}$ であるから，これを式 (2-138) に代入して式 (2-140) を使うと

$$e_{\mu\nu|\rho} k^\rho = 0 \tag{2-142}$$

を得る．式 (2-142) に (2-131) を代入すると

$$e_{\mu\nu|\rho} \frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}\sigma} = 0 \tag{2-143}$$

すなわち偏光テンソルは，重力波の進路に沿って平行移動されることがわかった．

2-3　重力波の偏光

TT ゲージをとった時に明らかにしたように, 重力波が存在するとゼロでないリーマンテンソル式 (2-101) が現れる. しかし, 重力波が存在するかどうかは, どのようにしたら現実にはわかるのであろうか. 重力の変化を測ればよいと思うかもしれないが, それは不可能である. なぜなら適当な座標変換で局所ローレンツ系に移れるから, そこではすべてのクリストッフェル記号はゼロになり, 慣性系になっている. これは, 等価原理が成立する限り正しい. つまり, 重力波があるとかないとか言っても局所的には測りようがない. リーマンテンソルは, そもそも力の差 = 潮汐力であったから, 潮汐力の波動である重力波の存否を決めるには, 2 点間の重力の差を測るのが, 唯一の方法となる. そこで, 簡単のため TT ゲージで z 方向に進む単色平面波を考えよう. すなわち

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 &+ \big(1 + h_+ \cos\omega_\mathrm{g}(t-z)\big)\mathrm{d}x^2 \\ &+ \big(1 - h_+ \cos\omega_\mathrm{g}(t-z)\big)\mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2\end{aligned} \tag{2-144}$$

としよう. ここで, h_+ は定数で十分小さい $(h_+ \ll 1)$ とする. また, ω_g は重力波の角振動数である. さて, この計量の中で試験粒子の測地線

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau} = 0 \tag{2-145}$$

を考える. ここで, 空間座標 $x^i =$ 一定なる粒子の軌跡を調べてみよう. まず

$$g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau} = -1 \tag{2-146}$$

より

$$\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau} = 1\ , \qquad \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau} = 0\ . \tag{2-147}$$

さて

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\mu_{00} \tag{2-148}$$

となるが, 式 (2-144) の計量テンソルでは

$$\Gamma^0_{00} = 0\ , \qquad \Gamma^i_{00} = 0 \tag{2-149}$$

であるため, 式 (2-147) は測地線の方程式を満足することがわかる. つまり, $x^i =$ 一定は自由落下している質点をあらわす. いま, $x^i =$ 一定の 2 つの質点 $\mathrm{A}(x^i_\mathrm{A})$ と $\mathrm{B}(x^i_\mathrm{B})$ を考えると A, B は測地線であり, 2 つの質点の座標の差は

$$\Delta x^i = x^i_\mathrm{B} - x^i_\mathrm{A} = \text{一定} \tag{2-150}$$

となる.

式 (2-150) を見ると重力波が来ても来なくても何も変わらないように見えるかもしれない. しかし, そうではない. 2 点 AB の長さは, 座標の差では決まらずに計量テンソル $g_{\mu\nu}$ に依存する.

計量テンソルとは，そもそも座標の差を物理的長さに結びつけるものであった．そこで，A 点としては原点をとり，B 点として A 点を中心とした半径 R_0 の球面を考えよう．この球面上の任意の点 P の座標 x^i は，極座標 (r, θ, φ) を用いて

$$
\begin{aligned}
x &= R_0 \sin\theta \cos\varphi \\
y &= R_0 \sin\theta \sin\varphi \\
z &= R_0 \cos\theta
\end{aligned}
\tag{2-151}
$$

と書ける．さて，原点と球面上の任意の点 P の距離を測るには光を使う．原点 O から点 P へ光を発射する．点 P の観測者は点 O からの光を受けると原点に向けて送り返す．原点 O では，光を発射してから戻ってくるまでに要した時間を自分の時計で測っておく．この時間を Δt とすると R_0 が波長に較べて十分小さい時には $(\Delta t)/2$ が原点 O から P までの距離と考えればよい．このことを実行してみよう．光は光速度不変の原理より $\mathrm{d}s^2 = 0$ に従って進む．いま光の方向は固定すると

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}x &= \sin\theta \cos\varphi \mathrm{d}r \\
\mathrm{d}y &= \sin\theta \sin\varphi \mathrm{d}r \\
\mathrm{d}z &= \cos\theta \mathrm{d}r
\end{aligned}
\tag{2-152}
$$

より

$$
0 = \mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}r^2 \Big(1 + h_+ \cos\omega_{\mathrm{g}}\big(t - r\cos\theta\big) \sin^2\theta \cos 2\varphi\Big) \tag{2-153}
$$

となる．式 (2-153) より，まず $\theta = 0$ すなわち点 P が z 軸上にあるときは，重力波の影響は何もない．すなわち

$$
\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}r^2 \tag{2-154}
$$

これは原点と点 P の (x, y) 座標に差がないと重力波が光の伝播に影響しないことを意味する．つまり，進行方向に垂直な方向にしか重力波の影響は現れない．これは，重力波が横波であることを示している．したがって一番影響の大きな $\theta = \pi/2$ の場合を考えれば十分である．そうすると式 (2-153) より $h_+ \ll 1$ を考慮して，

$$
\mathrm{d}r = (1 - \frac{h_+}{2} \cos\omega_{\mathrm{g}} t \cos 2\varphi) \mathrm{d}t \tag{2-155}
$$

重力波が存在しない $(h_+ = 0)$ なら原点から $t = t_0$ に発射された光は $t_0 + R_0$ に P 点に到着するはずであるが，式 (2-155) を見ると $h_+ \neq 0$ の時には，そうはならない．その時刻を $t = t_0 + \Delta t(\varphi)$ とおくと

$$
\int_0^{R_0} \mathrm{d}r = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t(\varphi)} \Big(1 - \frac{h_+}{2} \cos\omega_{\mathrm{g}} t \cos 2\varphi\Big)\, \mathrm{d}t \tag{2-156}
$$

より

$$
R_0 = \Delta t(\varphi) - \frac{h_+}{2\omega_{\mathrm{g}}} \big(\sin\omega_{\mathrm{g}}(t_0 + \Delta t(\varphi)) - \sin\omega_{\mathrm{g}} t_0\big) \cos 2\varphi \tag{2-157}
$$

となる. $\omega_{\rm g} R_0 \ll 1$ とすると (すなわち, $R_0 \ll \lambda/2\pi$: λ は重力波の波長)

$$\Delta t(\varphi) = R_0 + \frac{R_0 h_+ \cos \omega_{\rm g} t_0}{2} \cos 2\varphi \tag{2-158}$$

となる. この近似では, 点 P から原点に戻る時間は式 (2-158) と同じであるから, 結局原点 O から点 P までの距離 $R(\varphi)$ は

$$R(\varphi) = R_0 + \frac{R_0 h_+ \cos \omega_{\rm g} t_0}{2} \cos 2\varphi \tag{2-159}$$

となって方向 φ によって距離が変わる. あるいは, 光が到達する時間が変わる. したがって式 (2-158) の $\Delta t(\varphi)$ を測れば重力波の存否がわかるはずである.

$$\Delta R(\varphi) = \frac{R_0 h_+ \cos \omega_{\rm g} t}{2} \cos 2\varphi \tag{2-160}$$

であるから, 特に $\varphi = 0$ と $\varphi = \frac{\pi}{2}$ では ΔR の符号が反対になる.

以上のことは測地線偏差方程式を使っても証明できる. 今の場合, ある測地線に沿って局所慣性系がとれることを使うと [Misner, Thorne and Wheeler 1973 § 13.6, § 35.5], $X^i = 0$ を測地線としてその近傍で

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + (\delta_{ij} + O(|X^l|^2))\mathrm{d}X^i \mathrm{d}X^j \tag{2-161}$$

と書ける. $X^i_{\rm B}(t)$ を別の測地線とすると, 今の場合 $v \ll 1$ だから

$$\frac{\mathrm{d}^2 X^i_{\rm B}}{\mathrm{d}t^2} = -R^i{}_{0j0} X^j_{\rm B} \tag{2-162}$$

が成立する. 式 (2-86) の下でも述べたようにリーマンテンソルはゲージ不変なので $h^{\rm TT}_{ij}$ で計算したものを用いることができることに注意し式 (2-101) で今は $h^{\rm TT}_{ij}$ に ϵ を含んでいると考えると

$$\frac{\mathrm{d}^2 X^i_{\rm B}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\, h^{\rm TT}_{ij}\right) X^j_{\rm B} \ , \tag{2-163}$$

式 (2-163) を解いて

$$X^i_{\rm B} = X^i_{\rm B(0)} + \frac{h^{\rm TT}_{ij} X^j_{\rm B(0)}}{2} \tag{2-164}$$

を得る. ここで $X^i_{\rm B(0)}$ は重力波がない時の質点 B の位置である. 式 (2-164) と (2-160) が同じであることは容易に示せる. つまり,

$$(X^i_{\rm B})^2 = \left(X^i_{\rm B(0)} + \frac{h^{\rm TT}_{ij} X^j_{\rm B(0)}}{2}\right)^2 \tag{2-165}$$

であるから

$$R = R_0 + \frac{R_0}{2} h^{\rm TT}_{ij}\ \frac{X^i_{\rm B(0)}}{R_0} \frac{X^j_{\rm B(0)}}{R_0} \tag{2-166}$$

となるが,

$$\begin{aligned} X_{\rm B}(0) &= R_0 \cos\varphi \\ Y_{\rm B}(0) &= R_0 \sin\varphi \\ Z_{\rm B}(0) &= 0 \end{aligned} \tag{2-167}$$

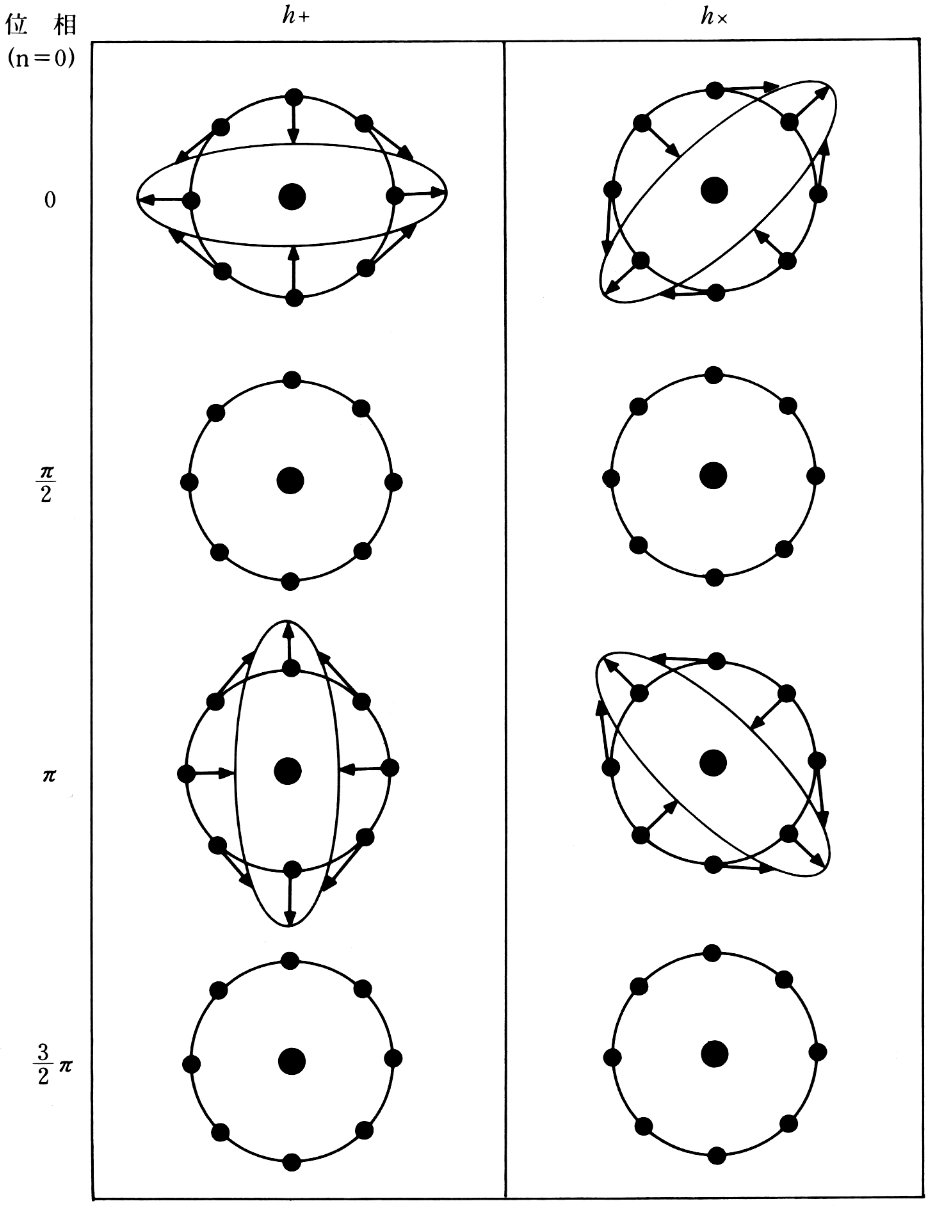


図 2-1　重力波の偏光 (左 ＋ モード, 右 × モード)

とおき, TT ゲージでの $h_{ij}^{\mathrm{TT}}(t-z)$ を

$$h_{ij}=\begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2-168}$$

ととると

$$R=R_0+\frac{R_0}{2}(h_+\cos 2\varphi+h_\times \sin 2\varphi) \tag{2-169}$$

となる．$h_\times = 0$ として式 (2-169) で $h_+(t-z) = h_+ \cos\omega_{\rm g}(t-z)$ と取れば (2-169) は (2-160) と同じであることがわかる．

図 2-1 に単色平面波の h_+ と $h_\times$ が z 方向に垂直な円周上に置いた質点に与える影響を示した．図 2-1 では円上においた質点と中心の質点との相対位置が式 (2-164) に従ってどうなるかを示した．h_+ も $h_\times$ も単色平面波 $\cos\omega_{\rm g}(t-z)$ として，波の位相 $\varphi = \omega_{\rm g}(t-z)$ が n を整数として，$\varphi = 2n\pi$, $(2n+1/2)\pi$, $(2n+1)\pi$, $(2n+3/2)\pi$ の時の $X^i_{\rm B}$ の位置を示した．もちろん変位は h_+ と $h_\times$ に比例するので，本当は小さくて見えないはずであるが，変位が目に見えるように大げさに示してある．h_+ モードでは，$\varphi = 2n\pi$ の時に x 方向は伸び，y 方向は縮む．$\varphi = (2n+\pi/2)$ ではもとに戻って $\varphi = (2n+1)\pi$ では反対に x 方向は縮み y 方向は伸びる．変位が十字方向で変化するので，これを＋モードと言い，h_+ と書く理由がこれでわかったと思う．$h_\times$ の影響は h_+ をちょうど 45° 回転させたものになっている．だから変位はちょうど × 方向で起こる．これを × モードと呼び，$h_\times$ と書くが，その理由も明らかであろう．＋モードも × モードも 180° 回転対称を持っている．これは，重力波がスピン 2 であることを示している．

＋モードと × モードは，電磁波での直線偏光に対応するものであるから，重力波でも円偏光や楕円偏光も考えることができる．重力波の偏光に対しても，電磁波と同様にストークスパラメター等の議論もなされている [Breuer 1975].

2-4　エネルギー，運動量，角運動量の保存則

一般相対性理論におけるエネルギー保存則はどうなっているのだろうか．ビアンキの恒等式のため，物質 (完全流体) のエネルギー運動量テンソルの発散がゼロであることが

$$T_\mu{}^\nu{}_{;\nu} = 0 \tag{2-170}$$

導かれるので，式 (2-170) がエネルギー運動量の保存を導くと思うかもしれない．しかし (2-170) は

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\ \frac{\partial}{\partial x^\nu}\ \sqrt{-g}\ T_\mu{}^\nu - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}T^{\alpha\beta} = 0 \tag{2-171}$$

となり，$g_{\alpha\beta}$ が一定でない限り，不変体積 $\sqrt{-g}{\rm d}^4x$ をかけて積分しても

$$0 = \int\ \frac{\partial}{\partial x^\nu}\ \left(\sqrt{-g}\ T_\mu{}^\nu\right)\,{\rm d}^4x - \int\ \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}\ T^{\alpha\beta}\sqrt{-g}{\rm d}^4x \tag{2-172}$$

としかならない．第 1 項だけならガウスの定理を使って $\int T^0_\mu\ \sqrt{-g}\ {\rm d}^3x$ が保存するという形に持っていけるが，一般的には第 2 項がゼロではないので式 (2-172) からは，いかなる保存則も導けない．それでは，一般相対性理論では，いかなる保存則も存在しないかというと，大局的な保存則は，以下のようにして導ける．このためにまず，重力波の線型理論を思い出そう．そこでは

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \\ \bar{h}_{\mu\nu} &= h_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2}h \end{aligned} \tag{2-173}$$

とした．ここでは式 (2-2) と違って $h_{\mu\nu}$ の中に ϵ というパラメータは含まれていると考える．そうするとアインシュタインテンソルは線型理論の範囲では式 (2-13) より

$$2G^{\mu\nu(1)} = \bar{h}^{\mu\rho}{}_{,\rho}{}^{,\nu} + \bar{h}^{\nu\rho}{}_{,\rho}{}^{,\mu} - \bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\rho}{}^{,\rho} - \eta^{\mu\nu}\bar{h}_\rho{}^\sigma{}_{,\sigma}{}^{,\rho} \tag{2-174}$$

となった．ここで $G^{\mu\nu(1)}$ は線型理論でのアインシュタインテンソルという意味である．ここで次のような 4 階のテンソル $H^{\mu\alpha\nu\beta}$

$$H^{\mu\alpha\nu\beta} \equiv -(\bar{h}^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} + \eta^{\mu\nu}\bar{h}^{\alpha\beta} - \bar{h}^{\alpha\nu}\eta^{\mu\beta} - \bar{h}^{\mu\beta}\eta^{\alpha\nu}) \tag{2-175}$$

を考える．$H^{\mu\alpha\nu\beta}$ はリーマンテンソルと同じ対称性を持っている．すなわち

$$\begin{aligned} &H^{\alpha\mu\nu\beta} = -H^{\mu\alpha\nu\beta}\,, \quad H^{\mu\alpha\beta\nu} = -H^{\mu\alpha\nu\beta} \\ &H^{\mu\alpha\nu\beta} + H^{\mu\nu\beta\alpha} + H^{\mu\beta\alpha\nu} = 0 \end{aligned} \tag{2-176}$$

である．さて，この $H^{\mu\alpha\nu\beta}$ を使うと

$$2G^{\mu\nu(1)} = H^{\mu\alpha\nu\beta}{}_{,\alpha\beta} \tag{2-177}$$

と書ける．ここで，(,) は共変微分ではなく，普通の偏微分であることに注意しよう．式 (2-177) をもう一度 x^ν で偏微分すると，右辺は $\nu\beta$ について反対称なため

$$G^{\mu\nu(1)}{}_{,\nu} = 0 \tag{2-178}$$

を得るが，これは線型理論でのビアンキ恒等式に他ならない．そこで式 (2-177) から出発してアインシュタイン方程式を途中で使うと

$$\begin{aligned} H^{\mu\alpha\nu\beta}{}_{,\alpha\beta} &= 2G^{\mu\nu(1)} \\ &= 2G^{\mu\nu} + 2(G^{\mu\nu(1)} - G^{\mu\nu}) \\ &= 16\pi(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) \end{aligned} \tag{2-179}$$

となる．ここで，$t^{\mu\nu}$ は

$$\begin{aligned} 16\pi t^{\mu\nu} &\equiv 2(G^{\mu\nu(1)} - G^{\mu\nu}) \\ &= H^{\mu\alpha\nu\beta}{}_{,\alpha\beta} - 2G^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{2-180}$$

が定義であり，$\bar{h}^{\mu\nu}$ について 2 次以上である．式 (2-179) の両辺を x^ν で偏微分すると左辺はゼロであるから

$$(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})_{,\nu} = 0 \tag{2-181}$$

なる保存則を得る．式 (2-181) は (1-23) と全く同じ形であるから，全エネルギー (P^0) と全運動量 (P^i)

$$P^\mu \equiv \int (T^{\mu 0} + t^{\mu 0})\, \mathrm{d}^3x \tag{2-182}$$

が保存する．式 (2-182) の体積積分は式 (2-179) の定義を使って

$$\begin{aligned} P^\mu &= \frac{1}{16\pi} \int H^{\mu\alpha 0\beta}{}_{,\alpha\beta}\, \mathrm{d}^3x \\ &= \frac{1}{16\pi} \int H^{\mu\alpha 0 j}{}_{,\alpha j}\, \mathrm{d}^3x \end{aligned} \tag{2-183}$$

となるが, さらにガウスの定理を使うと 2 次元面の表面積分

$$= \frac{1}{16\pi} \oint H^{\mu\alpha 0j}{}_{,\alpha}\, \mathrm{d}^2 S_j \tag{2-184}$$

となる.

以上の $H^{\mu\alpha\nu\beta}$ と $t^{\mu\nu}$ は, Misner, Thorne と Wheeler によるもので, $H^{\mu\alpha\nu\beta}_{\mathrm{MTW}}$, $t^{\mu\nu}_{\mathrm{MTW}}$ と今後表現する [Misner, Thorne and Wheeler 1973 chapter 20].

さて, $H^{\mu\alpha\nu\beta}$ の取り方は唯一ではない. ランダウとリフシッツによる別の取り方がある. ランダウとリフシッツは $H^{\mu\alpha\nu\beta}$ を

$$H^{\mu\alpha\nu\beta}_{\mathrm{LL}} \equiv (-g)\ (g^{\mu\nu}\ g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha}\ g^{\nu\beta}) \tag{2-185}$$

で定義した [ランダウ／リフシッツ 場の古典論 1964a § 96]. (2-185) で $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ として, $h_{\mu\nu}$ について 1 次の量だけをとると,

$$H^{\mu\alpha\nu\beta}_{\mathrm{LL}} = H^{\mu\alpha\nu\beta}_{\mathrm{MTW}} \tag{2-186}$$

であることは簡単にわかる. 式 (2-185) を用いて式 (2-179) と同様にアインシュタイン方程式を書き換えると

$$H^{\mu\alpha\nu\beta}_{\mathrm{LL}}{}_{,\alpha\beta} = 16\pi(-g)\ (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}_{\mathrm{LL}}) \tag{2-187}$$

となる. $H^{\mu\alpha\nu\beta}_{\mathrm{LL}}$ も $\nu\beta$ について反対称なので, 式 (2-181) と同様の保存則

$$((-g)\ (T^{\mu 0} + t^{\mu\nu}_{\mathrm{LL}}))_{,\nu} = 0$$

が成り立つ. (2-182) に対応して $P^\mu = \int (-g)\ (T^{\mu 0} + t^{\mu 0}_{\mathrm{LL}})\ \mathrm{d}^3 x$ である. ここで, $t^{\mu\nu}_{\mathrm{LL}}$ はランダウ-リフシッツのエネルギー運動量擬テンソルと呼ばれているもので, 具体的な表示は $\tilde{g}^{\mu\nu} = (-g)^{\frac{1}{2}}$ $g^{\mu\nu}$ として

$$\begin{aligned}(-g)\ t^{\alpha\beta}_{\mathrm{LL}} = \frac{1}{16\pi} \{ & \tilde{g}^{\alpha\beta}{}_{,\lambda}\ \tilde{g}^{\lambda\mu}{}_{,\mu} - \tilde{g}^{\alpha\lambda}{}_{,\lambda}\ \tilde{g}^{\beta\mu}{}_{,\mu} \\ & + \frac{1}{2}\ g^{\alpha\beta} g_{\lambda\mu}\ \tilde{g}^{\lambda\nu}{}_{,\rho}\ \tilde{g}^{\rho\mu}{}_{,\nu} - (g^{\alpha\lambda} g_{\mu\nu}\ \tilde{g}^{\beta\nu}{}_{,\rho}\ \tilde{g}^{\mu\rho}{}_{,\lambda} \\ & + g^{\beta\lambda}\ g_{\mu\nu}\ \tilde{g}^{\alpha\nu}{}_{,\rho}\ \tilde{g}^{\mu\rho}{}_{,\lambda}) + g_{\lambda\mu}\ g^{\nu\rho}\ \tilde{g}^{\alpha\lambda}{}_{,\nu}\ \tilde{g}^{\beta\mu}{}_{,\rho} \\ & + \frac{1}{8}\ (2g^{\alpha\lambda}\ g^{\beta\mu} - g^{\alpha\beta}\ g^{\lambda\mu})\ (2g_{\nu\rho}\ g_{\sigma\tau} - g_{\rho\sigma}\ g_{\nu\tau}) \\ & \tilde{g}^{\nu\tau}{}_{,\lambda}\ \tilde{g}^{\rho\sigma}{}_{,\mu} \}\end{aligned} \tag{2-188}$$

となる. $H^{\mu\alpha\nu\beta}_{\mathrm{MTW}}$ と $H^{\mu\alpha\nu\beta}_{\mathrm{LL}}$ では定義が違うから式 (2-183) の P^μ の値が変わると思うかもしれないが, P^μ は式 (2-184) に示したように空間的に無限遠での $H^{\mu\alpha\nu\beta}$ の表面積分で表される. したがって十分遠方では式 (2-186) で示されたように

$$H^{\mu\alpha\nu\beta}_{\mathrm{MTW}} = H^{\mu\alpha\nu\beta}_{\mathrm{LL}}$$

であるから P^μ の値は変わらない.

それより問題なのは, $t^{\mu\nu}_{\rm MTW}$ も $t^{\mu\nu}_{\rm LL}$ もテンソルではないという点である. つまり, 適当な座標変換をすれば, $t^{\mu\nu}_{\rm LL}$ は $g_{\mu\nu}$ の微分で書かれているから, いつでもゼロにできるからである (等価原理). $t^{\mu\nu}_{\rm LL}$ は座標系の線型変換に対してだけテンソルとして振舞う. そういう意味で, 擬テンソルと呼ばれるのだが, そのような量を含んだ式 (2-182) のような積分に物理的な意味があるのであろうか.

一般的な座標変換に対しては $t^{\mu\nu}_{\rm MTW}$ も $t^{\mu\nu}_{\rm LL}$ もテンソルではないから, P^{μ} が不変であるとは言えないが, 次のような座標変換に対しては不変であることが証明される. 考えている系, 例えば星とすると $T^{\mu\nu}$ は空間的に有限な領域でしか値を持っていないと考えるのは, まず自然である. さらに十分遠方では r を原点（例えば星の中心）からの距離とすると

$$
\begin{aligned}
g_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} + O\left(r^{-1}\right) \\
g_{\mu\nu,\alpha} &= O\left(r^{-2}\right)
\end{aligned}
\tag{2-189}
$$

が満たされているとする. (このような時空を漸近的に平坦な時空と呼ぶ.) 式 (2-189) より

$$
t^{\mu\nu}_{\rm LL} = O\left(r^{-4}\right) \tag{2-190}
$$

となる. すると, 式 (2-182) の積分で体積は r^3 に比例するから十分大きな半径 r 以上では, 積分への寄与は, 実質的にはゼロと考えてよい. そこで式 (2-189) を満たす 2 つの座標系を考えよう. 第 1 の座標系での時刻 x^0 での式 (2-182) の積分 P^{μ} と第 2 の座標系での時刻 x'^0 での積分 P'^{μ} が一致することを示そう (ランダウ／リフシッツ 1964a § 96). さてそのために式 (2-189) を満たす第 3 の座標系を考える. 第 3 の座標系は, 時刻 x^0 では第 1 の座標系に一致し, 時刻 x'^0 には第 2 の座標系に一致するように取る. この第 3 の座標系では保存則 (2-181) より

$$
\frac{\partial P^{\mu}}{\partial x^0} = 0 \tag{2-191}
$$

であるから $P^{\mu}(x^0) = P'^{\mu}(x'^0)$ である. つまり, 式 (2-189) を満たすような座標を考える限り式 (2-182) で考えた P^{μ} は座標系の取り方によらない.

エネルギー運動量が上の意味で定義できたので角運動量テンソル $J^{\mu\nu}$ は

$$
J^{\mu\nu} = \int \left(-g\right)\left(x^{\mu}\left(T^{\nu 0} + t^{\nu 0}_{\rm LL}\right) - x^{\nu}\left(T^{\mu 0} + t^{\mu 0}_{\rm LL}\right)\right) {\rm d}^3 x \tag{2-192}
$$

で定義される. 式 (2-187) を使うと式 (2-192) は

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{16\pi} \int \left(x^{\mu} H_{\rm LL}^{\nu\alpha 0\beta}{}_{,\alpha\beta} - x^{\nu} H_{\rm LL}^{\mu\alpha 0\beta}{}_{,\alpha\beta}\right) {\rm d}^3 x \\
&= \frac{1}{16\pi} \oint \left(x^{\mu} H^{\nu\alpha 0j}{}_{,\alpha} - x^{\nu} H^{\mu\alpha 0j}{}_{,\alpha} + H^{\mu j 0\nu} - H^{\nu j 0\mu}\right) {\rm d}^2\, S_j
\end{aligned}
\tag{2-193}
$$

となって, やはり無限遠での表面積分で書ける.

2-5　重力波のエネルギー, 運動量, 角運動量

前節で, 一般相対性理論におけるエネルギー, 運動量と角運動量の保存則を導いた. わかったことは, 局所的な保存則は存在しないが, 大局的な保存則は存在する. 保存されるエネルギー, 運

動量そして角運動量の値は漸近的に平坦であるという条件 (式 (2-189)) を満たす限り, 座標系の選び方によらないこともわかった. さて, 同じことは, 重力波についてはどうなのだろうか? 重力波のエネルギー, 運動量そして角運動量は, どのようにして定義すればよいのだろうか. 重力波の存在そのものは, すでに TT ゲージでの h_{ij}^{TT} とリーマンテンソルが式 (2-101) で結びつけられているので疑いはないが, エネルギー運動量については, まだ明らかではない. 前節で導入した $t_{\mathrm{LL}}^{\mu\nu}$ 式 (2-187) を重力波のエネルギー運動量テンソルと考えたいかもしれない. しかし, $t_{\mathrm{LL}}^{\mu\nu}$ は計量テンソルの偏微分の 2 乗以上で書かれているがテンソルではない. $t_{\mathrm{LL}}^{\mu\nu}$ は例えば, 局所ローレンツ系をとれば, $g_{\mu\nu,\rho}=0$ ゆえ, $t_{\mathrm{LL}}^{\mu\nu}=0$ になる. 等価原理により, 局所ローレンツ系をとることは常に可能だから, $t_{\mathrm{LL}}^{\mu\nu}$ は重力波のエネルギー運動量の定義になりえない. それでは, 例えば, $g_{\mu\nu,\rho}$ の代わりに共変微分 $g_{\mu\nu;\rho}$ にして $t_{\mathrm{LL}}^{\mu\nu}$ を定義すればと思うかもしれないが, 計量テンソルの共変微分はゼロであるから, $g_{\mu\nu;\rho}$ を使ったいかなる量もゼロになってしまう. つまり局所的にはいつでも等価原理によって重力をゼロにできるため, 重力とか重力波の局所的なエネルギー運動量を定義するという試みは, 間違った質問に答えようとすることになるのである.

2-2 節で $g_{B\mu\nu}$ というバックグラウンド時空の中で, 振幅 ϵ で伝播する重力波 $h_{\mu\nu}$(式 (2-105)) を考えた. バックグラウンド時空のリーマンテンソルを $O(L^{-2})$ としよう. つまり, L はバックグラウンド時空の曲率半径のオーダーである. λ を重力波の波長としよう. そうすると, 式 (2-125) で示したように $\lambda/L \ll 1$, $\epsilon \ll 1$ では重力波は

$$\bar{h}_{\mu\nu}{}^{|\rho}{}_{|\rho}=0 \tag{2-194}$$

に従って伝わる. それでは, ϵ を大きくしていった時, 考えている重力波はいつバックグラウンド時空の構造に影響を与えるのだろうか? それとも何も影響を与えないのだろうか?

今から上に述べたアインシュタイン方程式の非線型効果を調べるが, もくろみは, 重力波がバックグラウンドに与える非線型効果を使って重力波のエネルギー運動量テンソルを定義しようという所にある. これは, アインシュタイン方程式 $G_{\mu\nu}=8\pi T_{\mu\nu}$ では, 右辺のエネルギー運動量テンソルが左辺の時空の構造を決めているのだから, 逆に $G_{\mu\nu}$ を変化させるものは, 右辺のエネルギー運動量テンソルと同じ性質を持つと考えたい. このもくろみをあらかじめ予想するために, 最初にオーダー評価を行う. まず, $g_{B\mu\nu}$ と $h_{\mu\nu}$ はそれぞれ 1 のオーダーだが, その微分はそれぞれ

$$\partial g_B \sim \frac{1}{L} \quad , \qquad \partial h \sim \frac{1}{\lambda} \tag{2-195}$$

のオーダーである. いま $g_{\mu\nu}=g_{B\mu\nu}+\epsilon h_{\mu\nu}$ と考えているから, $G_{\mu\nu}$ の ϵ についての 2 次のオーダーは, $\epsilon^2\,\lambda^{-2}$ であるが, これを重力波のエネルギー運動量テンソルと見なすと, $T_{\mu\nu}^{\mathrm{GW}}=\epsilon^2\,\lambda^{-2}$ となる. $G_{\mu\nu}$ の ϵ について 0 次の量はオーダー L^{-2} であるから, 重力波がバックグラウンドの時空に影響を及ぼさないためには

$$L^{-2} \gg 8\pi\, T_{\mu\nu}^{\mathrm{GW}} \;\sim\; \left(\frac{\epsilon}{\lambda}\right)^2 \tag{2-196}$$

が必要であり, これは

$$\epsilon \ll \frac{\lambda}{L} \ll 1 \tag{2-197}$$

という条件になる．逆に $\epsilon \simeq \lambda L^{-1}$ なら，重力波の非線型効果がバックグラウンドに影響を及ぼすことになる [Isaacson 1968 a, b].

さて，メトリック $g_{\mu\nu}$ が与えられた時のリッチテンソル $R_{\mu\nu}$ を $R_{\mu\nu}\ (g_{\alpha\beta})$ と書くことにする．いま真空を考えることにすると $R_{\mu\nu}\ (g_{\alpha\beta})=0$ であるが [Brill and Hartle 1964], $R_{\mu\nu}\ (g_{\alpha\beta})$ を展開すると

$$R_{\mu\nu}\ (g_{B\alpha\beta}+\epsilon h_{\alpha\beta}) = R^{(0)}_{\mu\nu}+\epsilon R^{(1)}_{\mu\nu}+\epsilon^2 R^{(2)}_{\mu\nu}+O\ (\epsilon^3) \tag{2-198}$$

ここで

$$R^{(0)}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}(g_{B\alpha\beta})\ , \tag{2-199}$$

$$R^{(1)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\ \left(-h_{|\mu\nu} - h_{\mu\nu}{}^{|\rho}{}_{|\rho} + h_{\mu\rho}{}^{|\rho}{}_{|\nu} + h_{\nu\rho}{}^{|\rho}{}_{|\mu}\right) \tag{2-200}$$

$$\begin{aligned} R^{(2)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\ \Big\{ & \frac{1}{2}\ h^{\rho\tau}{}_{|\nu} h_{\rho\tau|\mu} \\ & + h^{\rho\tau}\ \left(h_{\tau\rho|\mu\nu} + h_{\mu\nu|\tau\rho} - h_{\tau\mu|\nu\rho} - h_{\tau\nu|\mu\rho}\right) \\ & + h_{\nu}{}^{\tau|\rho}\ \left(h_{\tau\mu|\rho} - h_{\rho\mu|\tau}\right) \\ & - \left(h^{\tau\rho}{}_{|\rho} - \frac{1}{2}\ h^{|\tau}\right)\ \left(h_{\tau\mu|\nu} + h_{\tau\nu|\mu} - h_{\mu\nu|\tau}\right)\ \Big\} \end{aligned} \tag{2-201}$$

である．ここで $|$ はバックグラウンドの計量 $g_{B\mu\nu}$ に関する共変微分である．

式 (2-200) は式 (2-115) と同じであるが，バックグラウンド $g_{B\mu\nu}$ のリッチテンソルとか，リーマンテンソルに比例する項は ϵL^{-2} のオーダーなので，今の展開では含まれない．同様にして $h_{\mu\nu}$ の共変微分はいま考えているオーダーでは交換する．交換しない部分はバックグラウンドのリーマンテンソルに比例しており高次項になるからである．

式 (2-198) の展開の各項のオーダーを見てみると

$$R^{(0)}_{\mu\nu} = O\ (L^{-2})\ ,\quad \epsilon R^{(1)}_{\mu\nu} = O\ \left(\frac{\epsilon}{\lambda^2}\right)\ ,\quad \epsilon^2 R^{(2)}_{\mu\nu} = \left(\frac{\epsilon^2}{\lambda^2}\right) \tag{2-202}$$

となる．いま $\epsilon \sim \lambda L^{-1}$ を考えると，式 (2-202) では，

$$R^{(0)}_{\mu\nu} = O\ (L^{-2})\ ,\quad \epsilon R^{(1)}_{\mu\nu} = O\ \left(\frac{1}{L\lambda}\right)\ ,\quad \epsilon^2 R^{(2)}_{\mu\nu} = O\ (L^{-2})$$

だから，まず

$$R^{(1)}_{\mu\nu} = 0 \tag{2-203}$$

となるべきである．式 (2-203) は高次項となるバックグラウンドのリーマンテンソルを除いて式 (2-115) と同じであるから式 (2-121) より

$$\bar{h}_{\mu\nu}{}^{|\rho}{}_{|\rho} - \bar{h}_{\nu}{}^{\rho}{}_{|\rho\mu} - \bar{h}_{\mu}{}^{\rho}{}_{|\rho\nu} + g_{B\mu\nu}\ \bar{h}_{\sigma}{}^{\rho}{}_{|\rho}{}^{|\sigma} = 0 \tag{2-204}$$

ここで,

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{B\mu\nu}\, h \tag{2-205}$$

である.

次に, $R^{(0)}_{\mu\nu}$ と $\epsilon^2 R^{(2)}_{\mu\nu}$ が同じオーダーになる. そこで

$$R^{(0)}_{\mu\nu} + \epsilon^2 R^{(2)}_{\mu\nu} = 0 \tag{2-206}$$

であるが, これを書き換えて,

$$\begin{aligned} G^{(0)}_{\mu\nu} &= R^{(0)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{B\mu\nu} R^{(0)} \\ &= -\epsilon^2 \left(R^{(2)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{B\mu\nu} R^{(2)}_{\alpha\beta} g_B^{\alpha\beta} \right) && \text{(2-207)} \\ &= 8\pi T^{\rm GW}_{\mu\nu} && \text{(2-208)} \end{aligned}$$

と書く. ここで $T^{\rm GW}_{\mu\nu}$ は

$$T^{\rm GW}_{\mu\nu} \equiv -\frac{\epsilon^2}{8\pi} \left(R^{(2)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{B\mu\nu}\, R^{(2)}_{\alpha\beta} g_B^{\alpha\beta} \right) \tag{2-209}$$

が定義である. 式 (2-208) はまさに重力波の非線型効果がバックグラウンド時空に影響を与えているという形をしていて, 式 (2-209) を重力波のエネルギー運動量テンソルとして考えることができることを示しているが, 式 (2-209) のままでは少し具合が悪い. というのは式 (2-209) の右辺は $\partial h \cdot \partial h$ の項ゆえ, 短波長で変動する成分も含まれている. 一方, 式 (2-207) の左辺は, $L\ (\gg \lambda)$ で, 変化する量のみである. そこで, $T^{\rm GW}_{\mu\nu}$ は, 波長よりは長いが, L よりは短い長さ d, (例えば d として数波長をとる. すなわち, $\lambda \ll d \ll L$) で右辺を平均化したものを持ってくる. ある量 Q のこのような意味での平均したものを $< Q >$ と書くと $< T^{\rm GW}_{\mu\nu} >$ は

$$< T^{\rm GW}_{\mu\nu} > \ \equiv -\frac{\epsilon^2}{8\pi} \left(< R^{(2)}_{\mu\nu} > - \frac{1}{2}\, g_{B\mu\nu} < g_B^{\alpha\beta}\ R^{(2)}_{\alpha\beta} > \right) \tag{2-210}$$

で定義される. そうすると式 (2-206) は

$$G^{(0)}_{\mu\nu} = 8\pi < T^{\rm GW}_{\mu\nu} > \tag{2-211}$$

と書き換えたことになる. $< Q >$ を量 Q の Brill-Hartle 平均化と呼んでいる [Isaacson 1968a, b]. 具体的に平均化をどう実行するのかは [DeWitt and Brehme 1960] が与えている. それによると $h_{\mu\nu}$ から作られるある量 $s_{\mu\nu}{}^{\rho}$ を考えると $s_{\mu\nu}{}^{\rho}$ の発散 $s_{\mu\nu}{}^{\rho}{}_{|\rho}$ といったタイプの量の平均はゼロになる. c と G の入り方をわかるようにして結果を書くと,

$$\begin{aligned} T^{\rm GW}_{\mu\nu} = \frac{c^4 \epsilon^2}{32\pi G}\ &< \bar{h}_{\alpha\beta|\mu}\, \bar{h}^{\alpha\beta}{}_{|\nu} - \bar{h}_{\alpha\beta}{}^{|\alpha}\, (\bar{h}^{\beta}{}_{\mu|\nu} + \bar{h}^{\beta}{}_{\nu|\mu}) \\ &\quad - \frac{1}{2}\, \bar{h}_{|\mu}\, \bar{h}_{|\nu}\ > \end{aligned} \tag{2-212}$$

となる. また (2-212) で定義された $T^{\rm GW}_{\mu\nu}$ はゲージ不変であることが示される.

2-6　PPN 形式と一般相対性理論の検証

一般相対性理論はニュートンによる重力理論をその極限として含んでいる．しかし，それだけでは一般相対性理論が正しい理論であるという証明にはならない．3-5-3 項では，重力波について一般相対性理論の検証を述べるが，ここでは，ニュートン極限の次はどうなっているのかを考える．これをポストニュートン近似 (Post Newtonian approximation) と呼ぶ．重力理論には，第 8 章 (他の重力理論と重力波) で述べるように，一般相対性理論以外のいろいろな理論がある．その中のどれが正しいかは実験的に明らかにするしかない．そこで，数多くの理論のポストニュートン極限を個々に考えるかわりにいくつかのパラメータでポストニュートン極限を考えるのが，本節のタイトルの PPN (Parameterized Post Newtonian) 形式である [Will 1993]．このようにすると，ある A という理論の場合は (後に出てくる PPN のパラメータの 1 つ) $\gamma = 0.9$ であるが，実験によると $\gamma = 1$ だから，A という理論は正しくないと言った議論ができるので便利である．

2-6-1　PPN メトリックテンソル

ポストニュートン近似とは ϕ をニュートンポテンシャルとして $v \sim \sqrt{|\phi|} \ll 1$ を展開パラメータと考えるのがまず第一歩である．ここで v は，例えば質点や流体の速度である．今から考えるのは，メトリックテンソルを考えるメトリック理論に限るので，メトリックテンソル $g_{\mu\nu}$ の v 展開をする，すなわち

$$g_{\mu\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} g_{\mu\nu}^{(n)} \tag{2-213}$$

と書く．ここで $g_{\mu\nu}^{(n)}$ は v の n 次のオーダーである．g_{00} の $n=2$ と g_{0j} と g_{jk} の $n=0$ のオーダーはすでにニュートン極限でわかっているので，今からはその先を考えることになるが，それをまず重力理論を特定せずにするのが，PPN 形式のポイントである．どういうオーダーが出てくるかは次のように考えればよい．すなわち質点のラグランジアン

$$L = -m\Big(- g_{00} - 2g_{0j}v^j - g_{jk}v^j v^k\Big)^{1/2} \tag{2-214}$$

を考える．まず，(2-214) の中で v^j について奇数のオーダーは v^j の時間反転に対して符号が変わるので散逸効果を表すが，今は散逸はないと考えているので，L の中身は v について偶数項のみである．したがって，g_{00} と g_{jk} は $v^{2n} (n = 0, 1, 2, \cdots)$ のオーダーの量のみあらわれ，g_{0j} には v^{2n+1} のオーダーの量 $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ のみあらわれる．g_{0j} の v の 1 次の項は，もしゼロでないとニュートン極限で運動エネルギー $mv^2/2$ を正しく与えなくなるので 0 になるべきである．したがって

$$\left.\begin{aligned} g_{00} &= -1 - \tfrac{2\phi}{c^2} + g_{00}^{(4)} + g_{00}^{(6)} + \cdots \\ g_{0j} &= g_{0j}^{(3)} + g_{0j}^{(5)} + \cdots \\ g_{jk} &= \delta_{jk} + g_{jk}^{(2)} + g_{jk}^{(4)} + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{2-215}$$

となることがわかる．いまから各 $g_{\mu\nu}^{(n)}$ の形をきめるが，完全流体を考えると，$g_{\mu\nu}^{(n)}$ をきめるのは次のようなものと考えられる．g_{00}，g_{0j} と g_{jk} はそれぞれ空間回転に関してスカラー，ベクト

ル, テンソルとして振舞う．物質の密度 (ρ), 速度 (v_i), 座標 x_i から作れるスカラーは ρ, $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|$, v^2, $\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$ といった量である．また, ベクトルは v_i, $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'$ とかいった量でテンソルは v_iv_j とか $(x-x')_j\ (x-x')_k$ といった量である．さらにこれらのポテンシャル $g_{\mu\nu}^{(n)}(n\neq 0)$ は $r\equiv\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\to\infty$ でゼロになるべきである．そして $g_{\mu\nu}^{(n)}$ はこのような量を用いたポストニュートンポテンシャルであるべきである．このような制限から $g_{\mu\nu}^{(n)}$ に入ってくる量は決まってくる．Will[1993] の表記法に従って $U=-\phi$ を ϕ の代わりに使うことにする．また $G=1, c=1$ の単位を使う．ラグランジアンの v について 4 次まで考えると必要なのは $g_{00}^{(4)}$, $g_{0j}^{(3)}$ と $g_{jk}^{(2)}$ である．今からは, この 3 つを考える．

1) $g_{jk}^{(2)}$ には $U\delta_{jk}$ と U_{jk} が考えられる量である．ここで

$$U=\int\frac{\rho(\boldsymbol{x}',\ t)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{x} \tag{2-216}$$

$$U_{jk}=\int\frac{\rho(\boldsymbol{x}',t)(x-x')_j(x-x')_k}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}' \tag{2-217}$$

式 (2-217) は, 空間回転に対してテンソルであり, U と同様の量で v^2 のオーダーであることがわかる．ところで超ポテンシャルと呼ばれる量 χ を

$$\chi\equiv-\int\rho(\boldsymbol{x}',t)|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}' \tag{2-218}$$

で定義すると

$$\chi_{,jk}=-\delta_{jk}U+U_{jk} \tag{2-219}$$

であることがわかるので, $g_{jk}^{(2)}$ は $U\delta_{jk}$ と $\chi_{,jk}$ で書ける．

2) $g_{0j}^{(3)}$ には V_j と W_j が入る．ここで

$$V_j=\int\frac{\rho(\boldsymbol{x},t)\ v_j'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}' \tag{2-220}$$

$$W_j=\int\frac{\rho(\boldsymbol{x}',\ t)\boldsymbol{v}'\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')(x-x')_j}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}' \tag{2-221}$$

である．

3) $g_{00}^{(4)}$ には多くの項が入る．$U^2,\Phi_W,\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3,\Phi_4\ A,B$ である．それらの定義は

$$\Phi_W=\int\rho'\rho''\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''|}-\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}''}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''|}\right)\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}'\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}'' \tag{2-222}$$

$$\Phi_1=\int\frac{\rho'v'^2}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}' \tag{2-223}$$

$$\Phi_2=\int\frac{\rho'U'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}' \tag{2-224}$$

$$\Phi_3 = \int \frac{\rho' \varepsilon'}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \, \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}' \tag{2-225}$$

$$\Phi_4 = \int \frac{P'}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \, \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}' \tag{2-226}$$

$$A = \int \frac{\rho'(\boldsymbol{v}' \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'))^2}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^3} \, \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}' \tag{2-227}$$

$$B = \int \frac{\rho'}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \, (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t} \, \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}' \tag{2-228}$$

ここで, 先ほどのスーパーポテンシャル χ を用いると

$$\chi_{,0} = -\int \frac{\partial \rho'}{\partial t} |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'| \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}' \tag{2-229}$$

ここで, 連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0$$

を使うと (2-229) は

$$\begin{aligned} \chi_{,0} &= \int \frac{\partial}{\partial x^{i\prime}} (\rho v^i)' |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'| \, \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}' \\ &= \int \rho v^i \frac{(x - x')_i}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \, \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}' \end{aligned} \tag{2-230}$$

式 (2-230) を x^j で微分すると

$$\chi_{,0j} = V_j - W_j \tag{2-231}$$

を得る. また, 時間で式 (2-230) をもう一度微分すると

$$\chi_{,00} = A + B - \Phi_1 \tag{2-232}$$

となることがわかる.

以上よりラグラジアン L の v の 4 次のオーダーに入ってくるのは 12 個の異なる項で, 一般的にはそれぞれの項の係数として 12 個のパラメータが入ることになる. しかし, $\chi_{,0}$ と $\chi_{,j}$ を用いた無限小座標変換をすることによってこの 12 個のパラメータを 10 個に減らすことができる. さらに, 10 個のパラメータのうち 7 つのパラメータがもしゼロでないとすると, 全エネルギー, 全運動量と全角運動量が保存しない [Will 1993] . また, 1 つのパラメータがゼロでないと, 空間に特別な場所 (Prefered location) があることを意味してしまう. 保存が成り立つ理論のみに限定すると $10 - 8 = 2$ つのパラメータ (通常 β, γ といわれる) のみが残る. この γ は γ_{ij} の行列式とはことなることに注意しよう. その結果 v^4 のオーダーに必要なメトリックテンソルは

$$g_{00} = -1 + 2U - 2\beta U^2 + (2\gamma + 2)\Phi_1 + 2\,(3\gamma - 2\beta + 1)\,\Phi_2 + 2\Phi_3 + 6\gamma\Phi_4 \tag{2-233}$$

$$g_{0j} = -\frac{1}{2}\ (4\gamma + 3)\ V_j - \frac{1}{2} W_j \tag{2-234}$$

$$g_{ij} = (1 + 2\gamma U)\ \delta_{ij} \tag{2-235}$$

となる．

それでは一般相対性理論の場合 β と γ がどうなっているのかを見てみよう．いま

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{2-236}$$

と書く．アインシュタイン方程式の両辺のトレースより

$$-R = 8\pi g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = 8\pi T \tag{2-237}$$

だから

$$R_{\mu\nu} = 8\pi\ \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\ g_{\mu\nu} T\right) \tag{2-238}$$

と書ける．$T_{\mu\nu}$ としては完全流体

$$T_{\mu\nu} = (\rho + \rho\varepsilon + p)\ u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu} \tag{2-239}$$

を使って，式 (2-200) と (2-201) で必要なオーダーの量を入れると

$$\begin{aligned} R_{00} = &-\frac{1}{2}\ \Delta h_{00} - \frac{1}{2}\ (h_{jj,00} - 2h_{0j,0j}) + \frac{1}{2} h_{00,j}\ \left(h_{jk,k} - \frac{1}{2}\ h_{kk,j}\right) \\ &-\frac{1}{4}\ |\nabla h_{00}|^2 + \frac{1}{2}\ h_{jk} h_{00,jk} \end{aligned} \tag{2-240}$$

$$R_{0j} = -\frac{1}{2}\ (\Delta h_{0j} - h_{k0,jk} + h_{kk,0j} - h_{kj,0k}) \tag{2-241}$$

$$R_{ij} = -\frac{1}{2}\ (\Delta h_{ij} - h_{00,ij} + h_{kk,ij} - h_{ki,kj} - h_{kj,ki}) \tag{2-242}$$

となる．ここで，2 度出てくるラテン字については，1 から 3 までの和をとるものとする．h_{00}, h_{0j} と h_{jk} について解いてやると式 (2-233) ~ (2-235) の β と γ は

$$\beta = 1\ \ , \qquad \gamma = 1 \tag{2-243}$$

であることが確かめられる [Will 1993 : 121-123].

2-6-2　一般相対性理論の検証

メトリックテンソルが決まると PPN 形式での光線の曲がりや近日点移動，シャピロ時間遅れを，β や γ をパラメータとして決めることができる．

PPN 形式のメトリックでの光の運動を考える [Will 1993]．光は，測地線に従う．測地線を空間成分と時間成分に分けて $x^0 = t$ として書くと

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}\sigma^2} + \Gamma^i_{\alpha\beta}\ \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\sigma}\ \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\sigma} = 0 \tag{2-244}$$

と

$$\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}\sigma^2} + \Gamma^0_{\alpha\beta}\,\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\sigma}\,\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\sigma} = 0 \tag{2-245}$$

となる. ここで σ はアフィンパラメータである. いま光線を $x^i = x^i(t)$ として t をパラメータにすると, 式 (2-244) と (2-245) を使って,

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^j}{\mathrm{d}t^2} + \left(\Gamma^j_{\alpha\beta} - \Gamma^0_{\alpha\beta}\,\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{2-246}$$

が光線の軌跡を決める式になる. 光線に沿っては $\mathrm{d}s^2 = 0$ であるので, 式 (2-233) ~ (2-235) を代入すると

$$0 = \left(1 - 2U - g^{(4)}_{00} - 2g^{(3)}_{0j}\,\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} - (1 + 2\gamma U)\left|\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\right|^2\right) \tag{2-247}$$

となるが, 光線の運動に関しては, $|\dot{x}^j| \sim 1$ であるので, v^2 のオーダーまで考える時には, $g^{(4)}_{00}$ と $g^{(3)}_{0j}$ は考えなくてよいので, γ のみがパラメータとなる. さて, この近似の範囲では,

$$\begin{aligned}
&\Gamma^0_{00} = -U_{,0} \qquad \Gamma^0_{0j} = -U_{,j} \qquad \Gamma^i_{00} = -U_{,i} \\
&\Gamma^0_{ij} = \gamma U_{,0}\delta_{ij}\ , \qquad \Gamma^i_{0j} = \gamma U_{,0}\delta_{ij}\ , \\
&\Gamma^i_{jk} = \gamma\left(\delta_{ij}U_{,k} + \delta_{ik}U_{,j} - \delta_{jk}U_{,i}\right)
\end{aligned} \tag{2-248}$$

になることに注意すると, 式 (2-246) は,

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2 x^j}{\mathrm{d}t^2} - \left(1 + \gamma\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\right|^2\right)U_{,j} + 2\,(1+\gamma)\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\cdot\nabla U\right)\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} \\
&\qquad + U_{,0}\left\{\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} + 2\gamma\,\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} - \gamma\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\right|^2\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\right\} = 0
\end{aligned} \tag{2-249}$$

となるが, $U_{,0}$ に比例する項は, v^3 の項なので, 高次項となる. したがって解くべき式は

$$1 - 2U - (1 + 2\gamma U)\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\right|^2 = 0 \tag{2-250}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 x^j}{\mathrm{d}t^2} &= \left(1 + \gamma\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\right|^2\right)U_{,j} \\
&\qquad -2\,(1+\gamma)\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\cdot\ \nabla U\right)\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}
\end{aligned} \tag{2-251}$$

となる. ニュートンオーダーでは, 光は真っ直ぐ進むから

$$x^j_{\mathrm{N}} = \hat{n}^j(t - t_0)\ , \qquad |\mathbf{n}| = 1 \tag{2-252}$$

が解であるので, 式 (2-251) の解を

$$x^j = \hat{n}^j(t - t_0) + x^j_p \tag{2-253}$$

の形で求める. 式 (2-253) を (2-250) に代入して

$$\mathbf{n}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}_p}{\mathrm{d}t} = -(1+\gamma)\,U \tag{2-254}$$

を得る. 式 (2-253) を (2-251) に代入すると, いま必要なオーダーでは

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}_p}{\mathrm{d}t^2} = (1+\gamma)\ (\nabla U - 2\ (\mathbf{n}\cdot\nabla U)\ \mathbf{n}) \tag{2-255}$$

である.

さて, $x_\parallel$ と $\mathbf{x}_\perp$ を

$$x_\parallel = \mathbf{n}\cdot\mathbf{x}_p\ , \qquad \mathbf{x}_\perp = \mathbf{x}_p - \mathbf{n}\ (\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}_p) \tag{2-256}$$

で定義すると式 (2-254) と (2-255) はそれぞれ

$$\frac{\mathrm{d}x_\parallel}{\mathrm{d}t} = -(1+\gamma)\ U \tag{2-257}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}_\perp}{\mathrm{d}t^2} = (1+\gamma)\ (\nabla U - \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\nabla U)) \tag{2-258}$$

となる.

1) 太陽の近くを通る光の湾曲

まず式 (2-258) を光源, 太陽と地球に対して適用しよう [Will 1993]. 太陽から光源への位置ベクトルを $\mathbf{x}_e$, 地球の位置ベクトルを $\mathbf{x}_\oplus$, 光源での光の方向ベクトルを $\mathbf{n}$ としよう.

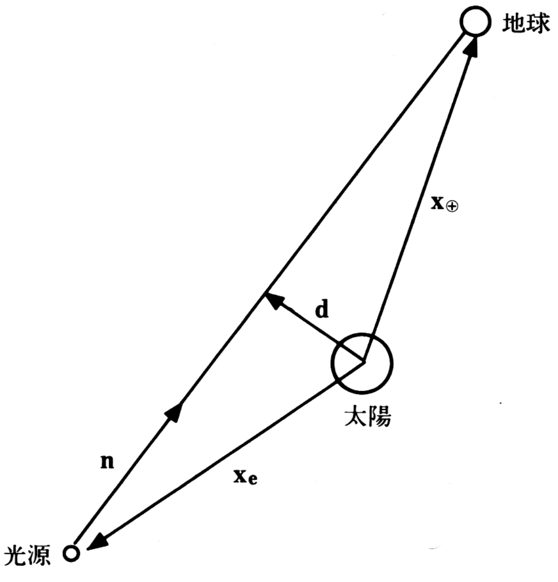


図 2-2　光源, 太陽と地球の関係

この場合

$$U = \frac{M_\odot}{r} \tag{2-259}$$

と書けるから時刻 $t=0$ に光源を光が出発したとすると, 時刻 t での光線の位置ベクトル $\mathbf{x}(t)$ は

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_e+\mathbf{n}t+\mathbf{x}_p \tag{2-260}$$

と書ける. 式 (2-258) では, $U=M_\odot/|\mathbf{x}(t)|$ であるが, 式 (2-260) を代入すると, 式 (2-258) は積分できて,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}_\perp}{\mathrm{d}t}&=-(1+\gamma)\,\frac{M_\odot\mathbf{d}}{\mathrm{d}^2}\,\left(\frac{\mathbf{x}(t)\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{x}(t)|}-\frac{\mathbf{x}_e\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{x}_e|}\right)\\ \mathbf{d}&=\mathbf{n}\times(\mathbf{x}_e\times\mathbf{n})\end{aligned} \tag{2-261}$$

ここで $\mathbf{d}$ は, 光線の太陽への最近接距離を表す. $\dot{\mathbf{x}}_\perp$ は $\mathbf{n}$ に垂直な方向の光の運動量の変化だから, 光の曲がりを表す. $\mathbf{x}(t)$ として $\mathbf{x}_\oplus$, また太陽の表面すれすれを通って地球にやってくる光線を考えると $\mathbf{x}(t)\cdot\mathbf{n}/|\mathbf{x}(t)|\simeq 1$, $\mathbf{x}_e\cdot\mathbf{n}/|\mathbf{x}_e|\sim -1$ だから光の曲がる角は

$$\begin{aligned}\delta\phi&=\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}_\perp}{\mathrm{d}t}=\frac{(1+\gamma)}{2}\,\frac{4M_\odot}{R_\odot}\\ &=1.75''\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\end{aligned} \tag{2-262}$$

となる. 遠くの QSO (準恒星状天体 Quasi Stellar Object) からの電波を大陸間干渉計 (VLBI) で測定した $\delta\phi$ の観測値より γ を決めると

$$\gamma=1.000\pm0.002 \tag{2-263}$$

となっている [Will 1993 :332-333].

2) シャピロ時間遅れ

これは地球と火星間のように, 惑星間でレーダーを往復させた時に生じる時間の遅れである. 今度は, 太陽重力内で地球と他の惑星 $\mathbf{x}_p$ を考えることになる. すると, 式 (2-257) で

$$\frac{\mathrm{d}x_\parallel}{\mathrm{d}t}=-(1+\gamma)\,\frac{M_\odot}{|\mathbf{x}_e+\mathbf{n}t|} \tag{2-264}$$

であるが, 式 (2-264) は積分できて

$$x_\parallel=-(1+\gamma)\,M_\odot\ln\,\left(\frac{|\mathbf{x}(t)|+\mathbf{x}(t)\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{x}_e|+\mathbf{x}_e\cdot\mathbf{n}}\right) \tag{2-265}$$

となるが, これは式 (2-265) の分だけ光の進行が遅れるわけだから, 到着時間が遅れることになる. $\mathbf{x}_e=\mathbf{x}_p$, $\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_\oplus$ として, また, $d\sim R_\odot$ になるようにする. そして, 惑星—地球間の往復を考えると

$$\begin{aligned}\delta t&=-2(1+\gamma)M_\odot\ln\frac{4r_\oplus r_\mathrm{p}}{d^2}\\ &=-\frac{(1+\gamma)}{2}\left\{240\mu s-20\mu s\ln\left(\frac{d}{R_\odot}\right)^2\left(\frac{1\mathrm{AU}}{r_\mathrm{p}}\right)\right\}\end{aligned} \tag{2-266}$$

となる. ここで, r_p は地球からもう一方の惑星までの距離で d は地球—惑星を結んだ直線に太陽から下ろした垂線の長さである. シャピロ時間遅れは火星の orbiter マリナーとバイキング衛星によって大変精度よく測られ [Will 1993 :176-175]

$$\gamma=1.000\pm0.002 \tag{2-267}$$

となっている.

3) 水星の近日点移動

一般に水星に限らずに質量 M_1, M_2 の連星系の相対運動を考えた時, 長半軸の方向が 1 周期当たり

$$\Delta\omega = \frac{6\pi(M_1 + M_2)}{a(1 - e^2)}\lambda_{\mathrm{p}} \tag{2-268}$$

$$\lambda_{\mathrm{p}} = \frac{1}{3}(2 + 2\gamma - \beta) \tag{2-269}$$

動くことがわかる. [Will 1993 :176-183] ここで a は長半軸の長さで e は離心率である. λ_{p} は一般相対論では 1 になるわけだが式 (2-268) は水星の場合

$$\dot{\omega} = 42.95''/1\ \text{世紀} \cdot \lambda_{\mathrm{p}} \tag{2-270}$$

となる. 現在の λ_{p} の値は観測的に

$$\lambda_{\mathrm{p}} = 1.003 \pm 0.005 \tag{2-271}$$

となっている [Will 1993 :176-183].

以上で分かったように太陽系内では PPN パラメータ β と γ に関して 0.1%のレベルの精度で一般相対性理論が検証されている.

第3章 · 重力波の生成

3-1 局所波動帯

前章で, 重力波の伝播を議論した. 重力波の偏波, 重力波の持つエネルギー運動量, 角運動量等も詳しく議論したし, バックグラウンド時空が与えられた時, いかにして重力波が伝わるかも調べた. しかし, 重力波がいかにして生成されるかについては, まだ議論していない. 本章では, 重力波の生成を議論する. そのためには, 重力波を発生する源から, 遠方の観測者に至るまでのいくつかの特徴的な領域を考える必要がある. L をまず重力波の源の典型的なサイズとしよう. M を重力波の源の質量とすると $2GM/c^2$ ($G = c = 1$ の単位系では $2M$) は, 重力波源がブラックホールになった時の典型的なサイズを与える. これは, $M = M_\odot$ とした時 3 km である. λ を考えている重力波の典型的な波長とする. Thorne [1980] に従って以下のような領域を考える.

1) 重力波源　$r \lesssim L$
2) 強い重力場の領域　$r \lesssim 10M$
3) 弱い重力場の近帯 (near zone)　$r > L,\ r \gg 10M,\ r \ll \lambdabar$ ($\lambdabar \equiv \lambda/2\pi$; 波数 k の逆数)
4) 局所波動帯 (local wave zone)　$r_{\rm I} \lesssim r \lesssim r_0$
5) 遠波動帯 (distant wave zone)　$r \gtrsim r_0$

局所波動帯というのは, 聞き慣れない言葉だと思うが, その内側の端 $r_{\rm I}$ と外側の端 r_0 がどのようにして決まるかを説明すれば, 意味がわかると思う. $r_{\rm I}$ を決めるためには以下の 4 つの事項をまず考える.

i) $r \leq \lambdabar$ したがって, 波動帯でなくなる.
ii) 重力による赤方偏移が重要になる. $r \sim 2M$
iii) バックグラウンドのリーマンテンソルは, M/r^3 のオーダーであるが, この効果で重力波の伝播が大きく変わる (式 (2-123)) 距離. これは, $\lambdabar^{-2} < Mr^{-3}$. すなわち, $\lambdabar \gtrsim (r^3M^{-1})^{\frac{1}{2}}$ を満たす.
iv) $r \lesssim L$.

これより, r_{I} は

$$r_{\mathrm{I}} \equiv \alpha \times \max\{\lambdabar,\ 2M,\ (M\lambdabar^2)^{\frac{1}{3}},\ L\} \tag{3-1}$$

で定義される. ここで α は 1 より大きな適当な数である. 一方, 局所波動帯の外側の端 r_0 を決めるのにはまず以下の 2 つの事項を考える.

i) 近くの質点による曲率とか, 宇宙の時空構造が重力波の伝播に影響を与える. すなわち, バックグラウンド時空の曲率半径を R_{B} とした時

$$r \sim R_{\mathrm{B}} \tag{3-2}$$

ii) クーロン対数項による重力波の phase shift $M\lambdabar^{-1}\ln r/r_{\mathrm{I}}$ が 1 に較べて無視できなくなる.
以上より r_0 の定義は

$$r_0 \equiv \min\ \{r_I \exp\ (\lambdabar/\beta M)\ ,\quad R_{\mathrm{B}}/\gamma\} \tag{3-3}$$

である. β と γ は α と同様の 1 のオーダーの適当な数とする. そして, もちろん α, β, γ は

$$r_0 - r_{\mathrm{I}} \gg \lambdabar \tag{3-4}$$

を満たすようにとる.

今から考えようとしている重力波の生成は, 源で発生した重力波が上に定義した局所波動帯でどうなっているかを問題にする. 局所波動帯では, 他の質量を持った天体 (例えば銀河とかブラックホール) や宇宙の膨張の影響とか, クーロン対数項を考える必要はない. 漸近的にミンコフスキー空間になる時空の中を重力波が伝播していくのを調べればよいことになる.

3-2 重力波の生成

式 (2-179) で考える. すなわち

$$h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \tag{3-5}$$

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\ \eta_{\mu\nu}\ h \tag{3-6}$$

$$h \equiv \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} \tag{3-7}$$

$$H^{\mu\alpha\nu\beta}_{\mathrm{MTW}} \equiv -\bar{h}^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} - \eta^{\mu\nu}\bar{h}^{\alpha\beta} + \bar{h}^{\nu\alpha}\eta^{\beta\mu} + \bar{h}^{\mu\beta}\eta^{\alpha\nu} \tag{3-8}$$

とした時, アインシュタイン方程式 $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$ は

$$H^{\mu\alpha\nu\beta}_{\mathrm{MTW},\alpha\beta} \equiv 16\pi\ (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}_{\mathrm{MTW}}) \tag{3-9}$$

$$t^{\mu\nu}_{\mathrm{MTW}} \equiv \frac{1}{16\pi}\ \left(H^{\mu\alpha\nu\beta}_{\mathrm{MTW},\alpha\beta} - 2\ (R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\ g^{\mu\nu}R)\right) \tag{3-10}$$

となる. いま effective なエネルギー運動量テンソル $\tau^{\mu\nu}$ を

$$\tau^{\mu\nu} = \tau^{\nu\mu} \equiv T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}_{\mathrm{MTW}} \tag{3-11}$$

で定義すると, 2-4 節での議論より

$$\tau^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \tag{3-12}$$

である. ここで再び注意しておくが, カンマ (,) は普通の偏微分である. いま調和条件

$$\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \tag{3-13}$$

を採用すると式 (3-9) は

$$\eta^{\alpha\beta}\ \bar{h}^{\mu\nu}_{,\alpha\beta} = -16\pi\tau^{\mu\nu} \tag{3-14}$$

となる. 式 (3-14) の左辺は

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \bar{h}^{\mu\nu} \tag{3-15}$$

という意味であるから, 波動方程式のグリーン関数 [今村　勤 1994]

$$\eta^{\alpha\beta} G_{,\alpha\beta} = -\delta\ (\mathbf{x} - \mathbf{x}')\ \delta\ (t - t') \tag{3-16}$$

の解

$$G\ (\mathbf{x} - \mathbf{x}',\ t - t') = \frac{\delta(t - t' - |\ \mathbf{x} - \mathbf{x}'\ |)}{4\pi\ \ |\ \mathbf{x} - \mathbf{x}'\ |} \tag{3-17}$$

を用いて, 式 (3-14) の解は

$$\bar{h}^{\mu\nu} = 4\int\ \frac{\tau^{\mu\nu}(t -\ |\ \mathbf{x} - \mathbf{x}'\ |,\ \mathbf{x}')}{|\ \mathbf{x} - \mathbf{x}'\ |}\ \mathrm{d}^3\mathbf{x}' \tag{3-18}$$

となる. $\mathbf{x}'$ での積分は主に重力波の源で大きな寄与がある. いま局所波動帯での $\bar{h}^{\mu\nu}$ を考えると

$$r = |\mathbf{x}| \gg |\mathbf{x}'| \sim L \tag{3-19}$$

であるから, $\mathbf{n} = \mathbf{x}/r$ として

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2 = r^2\ \left(1 - 2\mathbf{n}\cdot\frac{\mathbf{x}'}{r} + \frac{|\mathbf{x}'|^2}{r^2}\right)$$

において, L/r の 2 次以上のオーダーを無視すると

$$\simeq r^2\ (1 - 2\mathbf{n}\ \frac{\mathbf{x}'}{r}) \tag{3-20}$$

したがって

$$|\ \mathbf{x} - \mathbf{x}'\ |\ \ \simeq r - \mathbf{n}\mathbf{x}' \tag{3-21}$$

一方, 重力波は式 (2-85) で示したように $h_{\mu\nu}$ のトランスバーストレースレス部分をとる必要がある. P_i^j を射影演算子

$$P_j^i = \delta_j^i - n^i n_j \quad , \qquad n^i = x^i/r \tag{3-22}$$

として

$$h_{\rm TT}^{ij} \equiv P_k^i \; \bar{h}^{kl} P_l^j - \frac{1}{2} \; P^{ij} \; P_{kl} \; \bar{h}^{kl} \tag{3-23}$$

を考えればよい. ここで TT をとる時には $\bar{h}^{ij}$ と h^{ij} は同じことになることに注意しよう. したがって, L/r の最低次では

$$h_{\rm TT}^{ij} \; (t, \; \mathbf{x}) = \frac{4}{r} \int \; \tau_{\rm TT}^{ij} \; (t - r + \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}', \; \mathbf{x}') \; {\rm d}^3 x' \tag{3-24}$$

となる. 式 (3-24) は一般的には積分方程式であるが, 源の時間変動がゆっくりしている時には以下の遅延展開が可能である [Epstein and Wagoner 1975]. すなわち

$$h_{\rm TT}^{ij}(t, \; \mathbf{x}) = \frac{4}{r} \int \sum_{m=0}^{\infty} \; \frac{\partial}{\partial t^m} \; \tau_{\rm TT}^{ij}(t - r, \; \mathbf{x}') \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}')^m}{m!} \; {\rm d}^3 x' \tag{3-25}$$

というテイラー展開ができる. 式 (3-25) の展開が可能なためには, 光が源を横切る時間 Δt の間に源があまり動いていないこと ($\Delta t \gg |\Delta \mathbf{x}'| \simeq |\mathbf{v}'| \; \Delta t$), つまり重力波の源の典型的な速度を $v = |\mathbf{v}|$ として, $v \ll 1$ であることが必要である (スローモーション近似). 式 (3-25) は書き換えると次のような形にできる.

$$h_{\rm TT}^{ij}(t, \; \mathbf{x}) = \frac{2}{r} \sum_{m=0}^{\infty} \; n_{k_1} \; n_{k_2} \; \cdots n_{k_m} \; \mathcal{I}_{\rm TT}^{ij \; k_1 \; k_2 \cdots k_m} \; (t - r) \tag{3-26}$$

ここで

$$\mathcal{I}^{ij \; k_1 \; \cdots k_m} = \frac{2}{m!} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m \; \int \tau^{ij} \; x^{k_1} \; x^{k_2} \; \cdots x^{k_m} \; {\rm d}^3 x \tag{3-27}$$

である. まず, 最低次の $m = 0$ の項を考えよう.

$$\mathcal{I}^{ij} = 2 \int \tau^{ij} {\rm d}^3 x \tag{3-28}$$

であるが, 式 (3-28) は τ^{ij} の保存則 (式 (3-12)) を使うと別の形に書ける. まず,

$$\tau^{ij} = \tau^{il} \; \delta_l^j = \tau^{il} \; \frac{\partial x^j}{\partial x^l} = \frac{\partial \tau^{il} x^j}{\partial x^l} - \frac{\partial \tau^{il}}{\partial x^l} \; x^j \tag{3-29}$$

であるが, ここで式 (3-12) を使うと

$$\tau^{ij} = \frac{\partial \tau^{il} x^j}{\partial x^l} + \frac{\partial \tau^{0i}}{\partial t} \; x^j \tag{3-30}$$

となる. 次に式 (3-29) と同じことを τ^{0i} に対して実行する.

$$\tau^{0i} = \tau^{0l} \delta_l^i = \tau^{0l} \; \frac{\partial x^i}{\partial x^l} = \frac{\partial \tau^{0l} x^i}{\partial x^l} - \frac{\partial \tau^{0l}}{\partial x^l} \; x^i \tag{3-31}$$

ここで再び式 (3-12) を使うと

$$\tau^{0i} = \frac{\partial \tau^{0l} x^i}{\partial x^l} + \frac{\partial \tau^{00}}{\partial t}\ x^i \tag{3-32}$$

となる．式 (3-32) を (3-30) に代入してさらに，式 (3-12) を使うと

$$\tau^{ij} = \frac{\partial \tau^{il} x^j}{\partial x^l} - x^j\ \frac{\partial}{\partial x^l}\ \left(\frac{\partial \tau^{kl}}{\partial x^k}\ x^i\right) + \frac{\partial^2 \tau^{00}}{\partial t^2}\ x^i x^j \tag{3-33}$$

を得る．式 (3-33) の右辺は書き換えると

$$\tau^{ij} = \frac{\partial}{\partial x^l}\ (\tau^{il} x^j + \tau^{jl} x^i) - \tau^{ij} - \frac{\partial}{\partial x^l}\ \left(\frac{\partial \tau^{kl}}{\partial x^k}\ x^i x^j\right) + \frac{\partial^2 \tau_{00}}{\partial t^2}\ x^i x^j \tag{3-34}$$

となる．式 (3-34) において，発散の形になっている項はガウスの定理によって，表面積分になって落ちるので，結局

$$\int \tau^{ij} \mathrm{d}^3 x = \frac{1}{2}\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \tau^{00} x^i x^j\ \ \mathrm{d}^3 x \tag{3-35}$$

となる．式 (3-35) を (3-28) に代入して

$$\mathcal{I}^{ij} = \frac{1}{2}\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \tau^{00} x^i x^j\ \ \mathrm{d}^3 x \tag{3-36}$$

を得る．さて，完全流体を考えて，$|v| \ll 1$ とすると，

$$T^{00} \sim \rho \sim \frac{M}{L^3} \tag{3-37}$$

一方，$v \ll 1$ では，ϕ を重力ポテンシャルとして $\phi \sim M/L \ll 1$ だから，

$$t^{00} \sim -\frac{3}{8\pi}\ \phi_{,k}\ \phi_{,k} \sim \frac{M^2}{L^4} \sim \frac{M}{L}\ T^{00} \ll T^{00} \tag{3-38}$$

これより，τ^{00} は，

$$\tau^{00} = T^{00} + t^{00} = \rho\ (1 + O\ (\frac{M}{L})\ )$$

と見積もれるので，

$$\mathcal{I}^{ij} = \frac{1}{2}\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\ \int \rho x^i x^j \mathrm{d}^3 x \tag{3-39}$$

としてよい．さて，質量分布に関する四重極モーメント I_{ij} は

$$I_{ij} = \int \rho x^i x^j\ \ \mathrm{d}^3 x \tag{3-40}$$

で与えられる．したがって式 (3-39) は $\mathcal{I}^{ij}$ が I_{ij} の時間についての 2 階微分で表されていることを示している．重力波を取り出すには，$\mathcal{I}^{ij}$ の TT 成分を式 (3-23) に従って計算する必要があるが，そのためには I_{ij} のトレースレス部分 $\not{I}_{ij}$

$$\not{I}_{ij} = \int \rho\ (x^i x^j - \frac{1}{3}\ \delta_{ij} r^2)\ \mathrm{d}^3 x \tag{3-41}$$

を考える方が便利である．δ_{ij} に比例する項は TT 成分には効かないので $m=0$ に対しては

$$h_{ij}^{\mathrm{TT}}(t,\ \mathbf{x}) = \frac{2}{r}\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathcal{I}_{ij}^{\mathrm{TT}}(t-r) \tag{3-42}$$

となることがわかる．式 (3-41) の $\mathcal{I}_{ij}$ は，重力波源のニュートン的な重力ポテンシャル ϕ を遠方で展開した時に四重極として表れる項である．すなわち

$$\phi = -\frac{M}{r} - \frac{3\mathcal{I}_{ij}x^i x^j}{2r^5} + \cdots \tag{3-43}$$

である．

式 (3-42) よりまず，h_{ij} の大きさのオーダーを当たってみよう．

$$h_{ij}^{\mathrm{TT}}(m=0) = \frac{2}{r}\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\ \mathcal{I}_{ij}^{\mathrm{TT}} \tag{3-44}$$

$$\sim \frac{2}{r}\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\ ML^2$$

$$\sim \frac{2M}{r}v^2 \tag{3-45}$$

ここで，$\phi \sim ML^{-1} \sim v^2$ というニュートン的な源で成り立つ関係式を使った．M として太陽質量 $M_{\odot}$，距離として銀河系のサイズ 10 kpc をとると，

$$h_{ij}^{\mathrm{TT}}(m=0) \sim \frac{3\mathrm{km}}{10\mathrm{kpc}}\ \ v^2\ \ \left(\frac{r}{10\mathrm{kpc}}\right)^{-1}$$

$$\sim 10^{-17}\ \ v^2\ \ \left(\frac{r}{10\mathrm{kpc}}\right)^{-1} \tag{3-46}$$

$v \simeq 0.3$ 程度がもっとも大きいと考えられるから，重力波の振幅は大きくても

$$h_{ij}^{\mathrm{TT}}(m=0) \sim 10^{-18}\ \ \left(\frac{r}{10\mathrm{kpc}}\right)^{-1} \tag{3-47}$$

程度である．メトリックテンソルは

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{3-48}$$

であったから，h_{ij}^{TT} も無次元量であることに注意すると 1 に較べて 10^{-18} という大変小さい量を考えるのが，重力波を考えることになる．式 (3-42) からも明らかなように重力波は源の距離に反比例して減少する．(いわゆる spherical damping)．したがって乙女座の銀河団 (距離 15 Mpc) を考えれば，振幅はさらに式 (3-47) より 3 桁程落ちて 10^{-21}．さらに宇宙の果てを考えると $r \sim 3\mathrm{Gpc}$ ゆえ 3×10^{-24} という大きさになる．

今までは，$m=0$ のいわゆる四重極波を考えたが，$m \neq 0$ はどうなるのであろうか．式 (3-27) より m が 1 つ増えると，x が 1 つ増えて時間微分も 1 つ増えるからオーダーとしては

$$h_{ij}^{\mathrm{TT}}(m) = \frac{2}{r}\ n_{k_1}\ n_{k_2}\ \cdots n_{k_m}\ \mathcal{I}_{\mathrm{TT}}^{ij\ k_1 k_2 \cdots k_m}$$

$$\sim \frac{2M}{r}\ \ v^{2+m} \tag{3-49}$$

となって，四重極波より v^m だけ小さくなる．

3-3　四重極波の角度依存性

四重極波に例をとって, 放出された重力波が方向によってどのように見えるかを調べよう. h_{ij}^{TT} は

$$h_{ij}^{\mathrm{TT}} = \frac{2}{r}\ddot{I}_{ij}^{\mathrm{TT}} = \frac{2}{r}\left(\ddot{I}_{lm}P_i^l P_j^m - \frac{1}{2}P_{ij}P^{lm}\ddot{I}_{lm}\right) \tag{3-50}$$

で与えられる. ここで,¨は時間についての2階微分を表す. いま

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned} \tag{3-51}$$

で球座標 $(r,\ \theta,\ \varphi)$ を定義しよう. そうすると $(r,\ \theta,\ \varphi)$ 座標での h_{ij} は,

$$h_{rr} = h_{ij}^{\mathrm{TT}}\frac{\partial x^i}{\partial r}\frac{\partial x^j}{\partial r}\ ,\quad h_{r\theta} = h_{ij}^{\mathrm{TT}}\frac{\partial x^i}{\partial r}\frac{\partial x^j}{\partial \theta}\ ,\quad h_{r\varphi} = h_{ij}^{\mathrm{TT}}\frac{\partial x^i}{\partial r}\frac{\partial x^j}{\partial \varphi}\ ,$$

$$h_{\theta\theta} = h_{ij}^{\mathrm{TT}}\frac{\partial x^i}{\partial \theta}\frac{\partial x^j}{\partial \theta}\ ,\quad h_{\varphi\varphi} = h_{ij}^{\mathrm{TT}}\frac{\partial x^i}{\partial \varphi}\frac{\partial x^j}{\partial \varphi}\ ,\quad h_{\theta\varphi} = h_{ij}^{\mathrm{TT}}\frac{\partial x^i}{\partial \theta}\frac{\partial x^j}{\partial \varphi}\ , \tag{3-52}$$

である.

$$\frac{\partial x^i}{\partial r} = n^i$$

であり, $n^i h_{ij}^{\mathrm{TT}} = 0$ であるから, $h_{rr} = 0$, $h_{r\theta} = 0$, $h_{r\varphi} = 0$ となる. これは, r 方向が伝播の方向で, h_{ij}^{TT} はトランスバーストレースレスであるから, 当たり前の結果ではある.

$$\frac{\partial x^i}{\partial \theta}\,n_i = 0\ ,\quad \frac{\partial x^i}{\partial \varphi}\,n_i = 0 \tag{3-53}$$

であることを使うと

$$\begin{aligned} \frac{h_{\theta\theta}}{r^2} = \Big\{&(h_{xx}^{\mathrm{Q}} - h_{yy}^{\mathrm{Q}})\,\frac{(\cos^2\theta+1)}{4}\cos 2\varphi - \frac{(h_{xx}^{\mathrm{Q}} + h_{yy}^{\mathrm{Q}} - 2h_{zz}^{\mathrm{Q}})}{4}\sin^2\theta \\ &+ h_{xy}^{\mathrm{Q}}\left(\frac{\cos^2\theta+1}{2}\right)\sin 2\varphi - h_{xz}^{\mathrm{Q}}\,\sin\theta\cos\theta\cos\varphi \\ &- h_{yz}^{\mathrm{Q}}\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\Big\} \end{aligned} \tag{3-54}$$

$$\frac{h_{\varphi\varphi}}{r^2\sin^2\theta} = -\frac{h_{\theta\theta}}{r^2} \tag{3-55}$$

$$\begin{aligned} \frac{h_{\theta\varphi}}{r^2\sin\theta} = &-\frac{(h_{xx}^{\mathrm{Q}} - h_{yy}^{\mathrm{Q}})}{2}\cos\theta\sin 2\varphi + h_{xy}^{\mathrm{Q}}\cos\theta\cos 2\varphi \\ &+ h_{xz}^{\mathrm{Q}}\sin\theta\sin\varphi - h_{yz}^{\mathrm{Q}}\sin\theta\cos\varphi \end{aligned} \tag{3-56}$$

ここで,

$$h_{ij}^{\mathrm{Q}} \equiv \frac{2}{r}\,\ddot{I}_{ij} \tag{3-57}$$

という変数を使った．Q という添字は四重極 (Quadrupole) という意味である．
いま $Y_{lm}(\theta,\ \varphi)$ を球面調和関数として
f_{ij}^{lm} を

$$
f_{ij}^{lm} = r^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_{lm} & X_{lm} \\ 0 & X_{lm} & -\sin^2\theta W_{lm} \end{pmatrix} \quad (r,\ \theta,\ \varphi) \tag{3-58}
$$

$$
X_{lm} = 2\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\right) Y_{lm}(\theta,\ \varphi) \tag{3-59}
$$

$$
W_{lm} = \left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) Y_{lm}(\theta,\ \varphi) \tag{3-60}
$$

で定義する．Y_{lm} は，$l=2$ の場合は

$$
\begin{aligned}
Y_{22} &= \sqrt{\tfrac{15}{32\pi}}\ \sin^2\theta\ (\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) \\
Y_{21} &= -\sqrt{\tfrac{15}{8\pi}}\ \cos\theta\sin\theta\ (\cos\varphi + i\sin\varphi) \\
Y_{20} &= \sqrt{\tfrac{5}{16\pi}}\ (3\cos^2\theta - 1)
\end{aligned} \tag{3-61}
$$

であるので，W_{2m}，X_{2m} はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
W_{22} &= \sqrt{\tfrac{15}{32\pi}}\ 2\ (\cos^2\theta + 1)\ (\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)\ , \\
X_{22} &= \sqrt{\tfrac{15}{32\pi}}\ 4\sin\theta\cos\theta\ (-\sin 2\varphi + i\cos 2\varphi)\ , \\
W_{21} &= \sqrt{\tfrac{15}{8\pi}}\ 2\ \sin\theta\cos\theta\ (\cos\varphi + i\sin\varphi)\ , \\
X_{21} &= \sqrt{\tfrac{15}{8\pi}}\ 2\ \sin^2\theta\ (-\sin\varphi + i\cos\varphi)\ , \\
W_{20} &= \sqrt{\tfrac{3}{16\pi}}\ 6\sin^2\theta\ , \\
X_{20} &= 0
\end{aligned} \tag{3-62}
$$

となる．f_{ij}^{lm} を使うと，h_{ij}^{TT} は

$$
\begin{aligned}
h_{ij}^{\mathrm{TT}} = &\sqrt{\frac{32\pi}{15}}\ \frac{1}{8}\ (h_{xx}^{\mathrm{Q}} - h_{yy}^{\mathrm{Q}})\ \mathrm{Re}(f_{ij}^{22}(\theta,\ \varphi)) \\
&- \sqrt{\frac{16\pi}{3}}\ \frac{1}{24}\ (h_{xx}^{\mathrm{Q}} + h_{yy}^{\mathrm{Q}} - 2h_{zz}^{\mathrm{Q}})\ f_{ij}^{20}(\theta,\ \varphi) \\
&+ \sqrt{\frac{32\pi}{15}}\ \frac{1}{4}\ h_{xy}^{\mathrm{Q}}\mathrm{Im}(f_{ij}^{22}(\theta,\ \varphi)) \\
&- \sqrt{\frac{8\pi}{15}}\ \frac{1}{2}\ h_{xz}^{\mathrm{Q}}\mathrm{Re}(f_{ij}^{21})
\end{aligned} \tag{3-63}
$$

$$-\sqrt{\frac{8\pi}{15}}\,\frac{1}{2}\,h^{\rm Q}_{yz}{\rm Im}(f^{21}_{ij})$$

となっていることが確かめられる．つまり，四重極波の角度依存性は f^{lm}_{ij} というテンソルで特徴づけられる．式 (3-58) の f^{lm}_{ij} は，実は 3-6 節で議論するテンソル球面調和関数の一成分なのである．つまりこの f^{lm}_{ij} を使うと式 (3-54) ～ (3-56) は，$h^{\rm TT}_{ij}$ が (r,θ,φ) 座標で

$$h^{\rm TT}_{ij}=\sum_{m=-2}^{m=2}A_{2m}f^{2m}_{ij} \tag{3-64}$$

と書けることを示している．いま

$$h_{+}=\frac{h_{\theta\theta}}{r^2}\,,\qquad h_{\times}=\frac{h_{\theta\varphi}}{r^2\sin\theta} \tag{3-65}$$

と書くことにする．重力波源から十分離れた所では重力波は平面波近似がよい．そこで，n^i の方向を $\hat{z}$ とし，$d\hat{x}=rd\theta$, $d\hat{y}=r\sin\theta d\varphi$ で局所的に $(\hat{x},\ \hat{y})$ を定義すると

$$ds^2=-dt^2+(1+h_{+})\,d\hat{x}^2+2h_{\times}d\hat{x}\,d\hat{y}+(1-h_{+})\,d\hat{y}^2+d\hat{z}^2 \tag{3-66}$$

と書ける．これは式 (2-168) と合致している．以下ではいくつかの場合の $h^{\rm TT}_{ij}$ を具体的に求めてみよう．

例 1　2 つの同じ質量 M の星がお互いの重力によって引き合うときの重力波を計算しよう．簡単のため両星は質点と考える．両星は角運動量ゼロで z 軸上を運動するものとする．また，時刻 t で一方の質点が $z=a/2$ にあれば，もう一方は $z=-a/2$ にあるものとする．対称性から I_{zz} 以外はゼロであり，

$$I_{zz}=2M\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{1}{2}Ma^2 \tag{3-67}$$

である．両星は $a=\infty$ で $v=0$ であったとすると，

$$\begin{aligned}\dot{a}&=-2\sqrt{\frac{M}{a}}\\ \frac{d^2a}{dt^2}&=-2\frac{M}{a^2}\end{aligned} \tag{3-68}$$

より

$$\begin{aligned}\ddot{I}_{zz}&=M\,(a\ddot{a}+\dot{a}^2)\\ &=M\left(-2\,\frac{M}{a}+4\,\frac{M}{a}\right)=2\,\frac{M^2}{a(t)}\end{aligned} \tag{3-69}$$

を得る．式 (3-69) を (3-57) に代入すると $h^{\rm Q}_{zz}$ は

$$h^{\rm Q}_{zz}=\left(\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{2M}{a(t-r)}\right) \tag{3-70}$$

であるから式 (3-63) より

$$h_{+}=\frac{1}{2}\,\left(\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{2M}{a(t-r)}\right)\,\sin^2\theta$$

$$h_\times = 0 \tag{3-71}$$

となる．z 軸方向には重力波は放出されず，両星が衝突する方向に垂直な方向に最も強い重力波が放出されることがわかる．両星は，$2M$ $(= 3\mathrm{km}\ (M/M_\odot))$ に較べて十分大きな半径を持っていると考えているので，今の近似が成立する範囲では $2M/a(t) \ll 1$ である．

例 2　重力崩壊している球対称な星

球対称な重力平衡にある星からは，重力波が放出されないことは明らかであろう．四重極モーメントは星の半径を R として

$$\begin{aligned} I_{ij} &= \int \rho x_i x_j \mathrm{d}^3 x \\ &= \int_0^R \rho(r) r^4 \mathrm{d}r \int n_i n_j \mathrm{d}\Omega \\ &= \frac{4\pi}{3} \int_0^R \rho(r) r^4 \mathrm{d}r \ \delta_{ij} \end{aligned} \tag{3-72}$$

である．ここで，$\int n_i n_j \mathrm{d}\Omega = (4\pi/3)\delta_{ij}$ を使った．I_{ij} はゼロではないが，時間変化しないから 2 階微分 $\ddot{I}_{ij}$ はゼロになる．それでは，ρ が時間的に変化すればよいと思うかもしれない．確かにその時には

$$I_{ij} = \frac{4\pi}{3} \int_0^R \rho(r,\ t)\ r^4 \mathrm{d}r \quad \delta_{ij} \tag{3-73}$$

となって，$\ddot{I}_{ij}$ は時間的に変化するが，トレースレスにした時に消える．つまり，球対称な系からは，たとえ動的であろうと，重力波は放出されない．このことは，四重極放射という近似をはずしてもそうなっている．これは，一般相対性理論では球対称で真空な時空は，シュヴァルツシルト時空に限ると証明できるからである [例えばランダウ／リフシッツ 場の古典論 1964 § 97].

例 3　回転星からの重力波

球対称な星の平衡解からは，重力波は放出されないことがわかったが，回転している星の軸対称平衡解からは重力波は放出されるであろうか．いま円筒座標 $(R,\ \varphi,\ z)$ をとると軸対称性から密度 ρ は φ によらない．すなわち

$$\rho = \rho\ (R, z) \tag{3-74}$$

となるので，

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int \rho\ (R,z)\ R^2 \cos^2\varphi R\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi \\ &= \pi \int \rho\ (R,z)\ R^3 \mathrm{d}R \\ I_{yy} &= \int \rho\ (R,z)\ R^2 \sin^2\varphi R\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi \\ &= I_{xx} \\ I_{xy} &= \int \rho\ (R,z)\ R^2 \sin\varphi\cos\varphi R\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3-75}$$

また, 普通 $z=0$ 面に対して上下対称なので

$$I_{xz}=I_{yz}=0 \tag{3-76}$$

$$\begin{aligned} I_{zz} &= \int \rho\ (R,z)\ z^2 R\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi \\ &= 2\pi \int \rho\ (R,z)\ z^2 R\,\mathrm{d}R \end{aligned} \tag{3-77}$$

(3-75)~(3-77) を見ると, やはり密度 ρ が時間に依存しない限り $\ddot{I}_{ij}=0$ であるから, 重力波は放出されない. 軸対称な回転星が収縮したり, 膨張すると

$$\begin{aligned} &\rho=\rho\ (R,z,t) \\ &\ddot{I}_{xx}\neq 0\ , \quad \ddot{I}_{yy}\neq 0\ , \quad \ddot{I}_{zz}\neq 0 \end{aligned} \tag{3-78}$$

となるので, 重力波は放出される. この場合 (3-54) より

$$\begin{aligned} h_+ &= -\frac{1}{r}\ \left(\ddot{I}_{xx}-\ddot{I}_{zz}\right)\ \sin^2\theta \\ h_\times &= 0 \end{aligned} \tag{3-79}$$

となって, 例 1 の場合と同様に回転軸方向には重力波は放出されず, 回転軸に垂直な方向に最も強い重力波が放出される.

例 4　連星からの重力波

ニュートン重力で運動している 2 つの星を考えよう. 両星があまり接近していない場合は, それぞれを点粒子と考えることが許される. 正確には両星の自己重力に較べて潮汐力が十分小さいという意味である. 潮汐力は, 両星の間隔の 3 乗に逆比例しているから, 距離の増大とともに急激に小さくなる. いまそれぞれの星の質量を m_1, m_2 とする. 軌道は簡単のため円とすると, ケプラーの法則により, 両星の距離を a, 円軌道の角速度を Ω とした時

$$\begin{aligned} \frac{Gm_t}{a^3} &= \Omega^2=\left(\frac{2\pi}{P_\mathrm{b}}\right)^2 \\ m_\mathrm{t} &= m_1+m_2 \end{aligned} \tag{3-80}$$

となる. ここで P_b は, 公転周期である. (b は binary (連星) という意味である.) 重心を原点にとり, 軌道面を $z=0$ にとる. 両星の座標を $(x_i,\, y_i)$ (i =1, 2) とすると, Φ を適当な位相 (一定) として

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{m_2}{m_\mathrm{t}}\ a\cos\ (\Omega \mathrm{t}+\Phi) \\ y_1 &= \frac{m_2}{m_\mathrm{t}}\ a\sin\ (\Omega t+\Phi) \\ x_2 &= \ -\frac{m_1}{m_\mathrm{t}}\ a\cos\ (\Omega t+\Phi) \\ y_2 &= \ -\frac{m_1}{m_\mathrm{t}}\ a\sin\ (\Omega t+\Phi) \end{aligned} \tag{3-81}$$

となる. 式 (3-81) より

$$
\begin{aligned}
I_{xx} &= \frac{m_1 m_2}{2m_{\rm t}}\ a^2\ (1+\cos\ (2\Omega t+2\Phi)) \\
I_{yy} &= \frac{m_1 m_2}{2m_{\rm t}}\ a^2\ (1-\cos\ (2\Omega t+2\Phi)) \\
I_{xy} &= \frac{m_1 m_2}{2m_{\rm t}}\ a^2\ \sin\ (2\Omega t+2\Phi) \\
I_{xz} &= I_{yz} = I_{zz} = 0
\end{aligned} \tag{3-82}
$$

となる. $\ddot{I}_{ij}(t-r)$ は, 式 (3-80) を使うと

$$
\begin{aligned}
\ddot{I}_{xx} &= -\frac{2{\rm G}m_1 m_2}{a}\ \cos\ (2\Omega(t-r)+2\Phi) \\
&= -\ddot{I}_{yy} \\
\ddot{I}_{xy} &= -\frac{2{\rm G}m_1 m_2}{a}\ \sin\ (2\Omega(t-r)+2\Phi)
\end{aligned} \tag{3-83}
$$

となる. そうすると式 (3-54) と (3-66) より, c と G をあからさまに入れて書くと,

$$
h_+ = -\frac{2}{ra}\frac{Gm_1}{c^2}\frac{Gm_2}{c^2}\ \cos(2\Omega(t-r)-2\varphi+2\Phi)\ (\cos^2\theta+1) \tag{3-84}
$$

$$
h_\times = -\frac{2}{ra}\frac{Gm_1}{c^2}\frac{Gm_2}{c^2}\ \sin\ (2\Omega(t-r)-2\varphi+2\Phi)\ 2\cos\theta \tag{3-85}
$$

となる. h_+ は, 今度は軸上で最大値で軌道面で最小値となる. また, $h_\times$ がゼロではなく軸上で最大値をとり, 軌道面ではゼロとなる. また, $h_\times$ は軌道面に対して反対称になっている.

3-4 四重極波の運ぶ重力波のエネルギー, 角運動量

重力波のエネルギー運動量テンソルは, 式 (2-212) で与えられるが, TT ゲージでは簡単になって

$$
T^{\rm GW}_{\mu\nu} = \frac{1}{32\pi}\ <\bar{h}^{\rm TT}_{jk,\mu}\ \bar{h}^{\rm TT}_{jk,\nu}\ > \tag{3-86}
$$

となる. ここで, j, k は同じ添字について和をとるものとする. 式 (3-86) に (3-50) を代入すると

$$
T^{\rm GW}_{00} = \frac{1}{8\pi r^2}\ <\dddot{I\!\!\!-}^{\rm TT}_{jk}(t-r)\ \dddot{I\!\!\!-}^{\rm TT}_{jk}(t-r)\ > \tag{3-87}
$$

となる. r 方向のエネルギーフラックスは

$$
T^{0\rm GW}_{i}\ n^i = -T^{\rm GW}_{0i}\ n^i = T^{\rm GW}_{00} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \tag{3-88}
$$

となる. ここで $\ddot{I\!\!\!-}^{\rm TT}_{jk}$ が $t-r$ の関数であることを使った. すなわち

$$
\frac{\partial}{\partial x^i}\ddot{I\!\!\!-}_{jk}(t-r) = -\dddot{I\!\!\!-}_{jk}(t-r)n_i
$$

よって, 重力波のエネルギー放出率 $L_{\rm GW}$ は,

$$L_{\rm GW} = \int_{r\to\infty} T_i^{0{\rm GW}}\ n^i\ r^2 {\rm d}\Omega$$
$$= \frac{1}{8\pi}\int\ <\ \dddot{\mathcal{I}}_{jk}^{\rm TT}\ \dddot{\mathcal{I}}_{jk}^{\rm TT}\ >\ {\rm d}\Omega \tag{3-89}$$

式 (3-50) を使うと

$$L_{\rm GW} = \frac{1}{8\pi} < \int\ \{\ \dddot{\mathcal{I}}_{jk}\ \dddot{\mathcal{I}}_{jk} - 2n_i\ \dddot{\mathcal{I}}_{ij}\ \dddot{\mathcal{I}}_{jk}\ n_k$$
$$+ \frac{1}{2}\ (n_i\ \dddot{\mathcal{I}}_{ij}\ n_j)^2\ \}\ {\rm d}\Omega > \tag{3-90}$$

となる. ここで公式

$$\int n_i n_j {\rm d}\Omega = \frac{4\pi}{3}\ \delta_{ij} \tag{3-91}$$

と

$$\int n_i n_j n_k n_l {\rm d}\Omega = \frac{4\pi}{15}\ (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{3-92}$$

を使うと

$$L_{\rm GW} = \frac{1}{5}\ <\ \dddot{\mathcal{I}}_{jk}\ \dddot{\mathcal{I}}_{jk}\ > \tag{3-93}$$

となる. (3-93) は, 四重極公式と呼ばれている [ランダウ／リフシッツ 場の古典論 1964 : 103]. c と G を式 (3-93) にあからさまに入れて書くと,

$$L_{\rm GW} = \frac{G}{5c^5}\ <\ \dddot{\mathcal{I}}_{ik}\ \dddot{\mathcal{I}}_{jk}\ > \tag{3-94}$$

となる. $\dddot{\mathcal{I}}_{jk}$ は仕事率の次元を持っている. 左辺も仕事率であることから c^5/G も仕事率であるが, これは大変大きい.

$$L_0 \equiv \frac{c^5}{G} = 3.6 \times 10^{59} {\rm erg\ s^{-1}}$$
$$= 2 \times 10^5 M_\odot\ c^2\ {\rm s}^{-1} \tag{3-95}$$

このため, 地球上で発生させうる重力波によるエネルギー放出率は大変小さい. 地球上での重力波の源の質量を M, サイズを R, 変動の時間スケールを T としよう. そうすると $\dddot{\mathcal{I}}_{jk}$ は一番大きく見積もっても

$$\dddot{\mathcal{I}}_{jk} \sim MR^2T^{-3} \tag{3-96}$$

$v = RT^{-1}$ として

$$L_{\rm GW} \lesssim \left(\frac{GM}{Rc^2}\right) \times \left(\frac{v}{c}\right)^3\ M\ v^2\ T^{-1} \tag{3-97}$$

GM/Rc^2 と $\left(v/c\right)^3$ は 1 に較べて大変小さい数であるので, 重力波放出によって重力波源が運動エネルギーを失う時間スケール $\tau_{\rm loss}$ は,

$$\tau_{\rm loss} \equiv \frac{Mv^2}{L_{\rm GW}} = T \times \left(\frac{GM}{Rc^2}\right)^{-1} \left(\frac{v}{c}\right)^{-3} \gg T \tag{3-98}$$

となる. いま質量 100 kg の 2 つの鉄球を 2 m の細い鉄棒の両端において 100 Hz の周期で回転させたとしよう. この鉄球のもつ運動エネルギー $E_{\rm K}$ は,

$$\begin{aligned} E_{\rm K} &= 2 \times \frac{1}{2}\ 10^5{\rm g} \times (10^2{\rm cm} \times 2\pi \cdot 10^2{\rm Hz})^2 \\ &= 3.9 \times 10^{14}{\rm erg} \end{aligned} \tag{3-99}$$

一方, 式 (3-94) より

$$L_{\rm GW} \sim \frac{(E_{\rm K} \cdot 100{\rm Hz})^2}{L_0} = \frac{(3.9 \times 10^{16})^2}{3.6 \times 10^{59}} = 4 \times 10^{-27}{\rm erg\ s^{-1}}$$

だから

$$\tau_{\rm loss} \sim 10^{41}\ {\rm s} \tag{3-100}$$

となる. 宇宙は, 始まってからでもせいぜい 10^{17}s なので, これは大変長い. また, 重力波の振幅 h_{ij} は式 (3-45) を使うと

$$h_{ij} \sim 4 \times 10^{-35}\ r^{-1} \tag{3-101}$$

ここで r は重力波源からの距離 (cm 単位) であるが, 重力波を検出するには, r は少なくとも一波長より長い必要があるので, $r > 1.5 \times 10^8{\rm cm} = 1500{\rm km}$. したがって

$$h_{ij} \lesssim 10^{-43} \tag{3-102}$$

となって式 (3-47) の銀河系内の源に較べても大変小さい. したがって地球上で重力波を発生させることはできても, それを検出することは, 地球外からの重力波を検出するより, はるかに難しく, ほぼ絶望的であることがわかる.

さて, 後に使う必要があるので, 前節の例 4 のもう少し一般的な場合, すなわち, 円軌道でない場合を考えてみる [Peters and Mathews 1963, Peters 1964]. 2 つの質点 m_1 m_2 の座標を $(d_1 \cos\psi,$ $d_1 \sin\psi)$ と $(-d_2 \cos\psi, -d_2 \sin\psi)$ とする. d_1 と d_2 は, m_1 と m_2 の間の距離 d (離心率 $e \neq 0$ の時は一般に変化する) と

$$d_1 = \frac{m_2}{m_{\rm t}}\ d\ , \qquad d_2 = \frac{m_1}{m_{\rm t}}\ d \tag{3-103}$$

という関係で与えられている. 慣性モーメントは

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \frac{m_1 m_2}{m_{\rm t}}\ d^2 \cos^2\psi \\ I_{yy} &= \frac{m_1 m_2}{m_{\rm t}}\ d^2 \sin^2\psi \end{aligned}$$

$$I_{xy} = \frac{m_1 m_2}{m_{\mathrm{t}}}\ d^2 \sin\psi \cos\psi \tag{3-104}$$

で与えられる．楕円軌道の長半軸を a, 離心率を e として

$$d = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\psi} \tag{3-105}$$

という関係がある (ケプラー軌道については式 (3-205)∼(3-226) を参照)．また, 面積速度が一定であるので, 楕円の短半軸を b とすると,

$$\frac{1}{2}\ d^2\dot{\psi} = \frac{\pi a b}{P_{\mathrm{b}}} \tag{3-106}$$

となる．$b = a\sqrt{1-e^2}$ であることに注意して

$$\dot{\psi} = \frac{(G m_{\mathrm{t}} a\ (1-e^2))^{\frac{1}{2}}}{d^2} \tag{3-107}$$

が得られる．式 (3-105) と (3-107) を使うと, 式 (3-104) の時間についての 3 階微分が実行できて

$$\begin{aligned}
\dddot{I}_{xx} &= \beta\ (1+e\cos\psi)^2\ (2\sin 2\psi + 3e\sin\psi\cos^2\psi)\ \ , \\
\dddot{I}_{yy} &= -\beta\ (1+e\cos\psi)^2\ (2\sin 2\psi + e\sin\psi\ (1+3\cos^2\psi))\ \ , \\
\dddot{I}_{xy} &= -\beta\ (1+e\cos\psi)^2\ (2\cos 2\psi - e\cos\psi\ (1-3\cos^2\psi))\ \ , \\
\beta^2 &= \frac{4G^3 m_1^2 m_2^2 m_{\mathrm{t}}}{a^5(1-e^2)^5}
\end{aligned} \tag{3-108}$$

を得る．式 (3-108) を (3-94) に代入すると L_{GW} は

$$L_{\mathrm{GW}} = A\ < (1+e\cos\psi)^4\ (12\ (1+e\cos\psi)^2 + e^2\sin^2\psi) > \tag{3-109}$$

となる．ここで,

$$A = \frac{8}{15}\ \frac{G^4}{c^5}\ \frac{m_1^2 m_2^2 m_{\mathrm{t}}}{a^5(1-e^2)^5}$$

である．式 (3-109) の平均は,

$$\begin{aligned}
&< (1+e\cos\psi)^4\ \ (12\ (1+e\cos\psi)^2 + e^2\sin^2\psi) > \\
&= \frac{1}{P_{\mathrm{b}}}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\psi}{\dot{\psi}}\ (1+e\cos\psi)^4\ \ (12\ (1+e\cos\psi)^2 + e^2\sin^2\psi)
\end{aligned} \tag{3-110}$$

であるが, 式 (3-107) と (3-80) を使うと

$$= \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{2\pi}\ \int_0^{2\pi}\ (1+e\cos\psi)^2\ \ (12\ (1+e\cos\psi)^2 + e^2\sin^2\psi)\ \mathrm{d}\psi \tag{3-111}$$

となる．式 (3-111) の積分を実行すると

$$L_{\mathrm{GW}} = \frac{32}{5}\ \frac{G^4}{c^5}\ \frac{m_1^2 m_2^2 (m_1+m_2)}{a^5(1-e^2)^{7/2}}\ \left(1 + \frac{73}{24}\ e^2 + \frac{37}{96}\ e^4\right) \tag{3-112}$$

を得る．

次に重力波の運ぶ角運動量を計算しよう．式 (2-192) で定義した J^{jk} の時間変化を考えよう．$\tau^{\mu\nu} = (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}_{\rm LL})\,(-g)$ として

$$\frac{{\rm d}J^{jk}}{{\rm d}t} = \int \left(x^j \ \frac{\partial \tau^{k0}}{\partial t} - x^k \ \frac{\partial \tau^{j0}}{\partial t} \right) {\rm d}^3 x \tag{3-113}$$

$\tau^{\mu\nu}$ の保存則

$$\frac{\partial \tau^{\mu 0}}{\partial t} = -\frac{\partial \tau^{\mu l}}{\partial x^l}$$

と対称性 $\tau^{\mu\nu} = \tau^{\nu\mu}$ を使うと式 (3-113) は,

$$\frac{{\rm d}J^{jk}}{{\rm d}t} = -\int \frac{\partial}{\partial x^l} \ (x^j \tau^{kl} - x^k \tau^{jl})\ {\rm d}^3 x \tag{3-114}$$

となる．式 (3-114) は, 表面積分に書き換えることができて

$$\frac{{\rm d}J^{jk}}{{\rm d}t} = -\int (x^j \tau^{kl} - x^k \tau^{jl})\ n_l\ r^2 {\rm d}\Omega \tag{3-115}$$

と表現できる．いま重力波の持つ角運動量 S_i を

$$S_i = \epsilon_{ijk} J^{jk} \tag{3-116}$$

で定義する．ここで,

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} \ \ 1 & i,\ j,\ k \text{ が偶置換 } (\epsilon_{123} = 1) \\ -1 & i,\ j,\ k \text{ が奇置換} \\ \ \ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

は, 完全反対称なテンソルである．すると, 系の角運動量 S_i の時間変化は

$$\frac{{\rm d}S_i}{{\rm d}t} = -\int \epsilon_{ijk} x^j \tau^{kl} n_l\ r^2 {\rm d}\Omega \tag{3-117}$$

となる．したがって, 重力波の運ぶ角運動量は,

$$\frac{{\rm d}S_i^{\rm GW}}{{\rm d}t} = \int \epsilon_{ijk} x^j \tau^{kl} n_l\ r^2 {\rm d}\Omega \tag{3-118}$$

となる．さて, (3-118) を計算するには局所波動帯では, $T^{\mu\nu} = 0$ に注意し, また, TT ゲージ

$$h = 0\ , \qquad h^{ij}{}_{,j} = 0 \tag{3-119}$$

で計算すればよいから,

$$\frac{{\rm d}S_i^{\rm GW}}{{\rm d}t} = \int \epsilon_{ijk} x^j t^{kl}_{LL} n_l\ r^2 {\rm d}\Omega \tag{3-120}$$

となる．エネルギーの所で議論したように, 式 (3-120) の被積分関数は, 数波長にわたる平均 (Brill-Hatrle 平均) をとる必要がある．したがって

$$\frac{{\rm d}S_i^{\rm GW}}{{\rm d}t} = \int \epsilon_{ijk} x^j \ < t^{kl}_{LL} > \ n_l\ r^2 {\rm d}\Omega \tag{3-121}$$

とすべきである．TT ゲージでの t_{LL}^{kl} は, (2-188) の表式から得られる．g^{kl} に比例する項は式 (3-121) に代入すると $\epsilon_{ijk}x^j x^k = 0$ より消えることに注意すると

$$\frac{\mathrm{d}S_i^{\mathrm{GW}}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{16\pi}\int \epsilon_{ijk}x^j \ < -h^l{}_{m,p}\ h^{mp,k}\ n_l - h^k{}_{m,p}\ h^{mp,l}\ n_l$$

$$+ h^{kp,m}\ h^l{}_{p,m}\ n_l + \frac{1}{2}\ h_{mp}{}^{,k}\ h^{mp,l}\ n_l > \ r^2\mathrm{d}\Omega \qquad (3\text{-}122)$$

と書くことができる．< > の中の第 1 項は, TT ゲージでは

$$h^l{}_m\ n_l = 0$$

また,

$$n_{l,p} = \frac{\delta_{lp} - n_l n_p}{r}$$

ということを使うと

$$\frac{h_{mp}h^{mp,k}}{r} \qquad (3\text{-}123)$$

となるが, これは, 数波長にわたって平均化した時に消える．< > の中の第 2 項と第 3 項については局所波動帯では, 式 (3-26) より

$$h_{mp} = \frac{Q_{mp}(t-r,\ \theta,\ \varphi)}{r} \qquad (3\text{-}124)$$

という形に書ける事に注意し, また

$$n_l\ h_{mp}{}^{,l} = -\dot{h}_{mp} - \frac{h_{mp}}{r} \qquad (3\text{-}125)$$

にも注意すると, 再び式 (3-123) を使って

$$-h^k{}_{m,p}\ h^{mp,l}\ n_l + h^{kp,m}\ h^l{}_{p,m}\ n_l \ = h^k{}_{m,p}\ \dot{h}^{mp} \qquad (3\text{-}126)$$

となる．< > の中の第 4 項は式 (3-125) を使うと

$$\frac{1}{2}\ h_{mp}{}^{,k}\ h^{mp,l}\ n_l = -\frac{1}{2}\left(h_{mp}{}^{,k}\ \dot{h}^{mp} + \frac{h_{mp}{}^{,k}h^{mp}}{r}\right) \qquad (3\text{-}127)$$

となるが, 右辺の第 2 項は平均するとゼロになる．結局, TT ゲージで計算していることを明記して書き直すと, 式 (3-121) は

$$\frac{\mathrm{d}S_i^{\mathrm{GW}}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{16\pi}\int \epsilon_{ijk}x^j \ < h^{\mathrm{TT}}_{km,p}\ \dot{h}^{\mathrm{TT}}_{mp} - \frac{1}{2}\ h^{\mathrm{TT}}_{mp,k}\ \dot{h}^{\mathrm{TT}}_{mp} > \ r^2\mathrm{d}\Omega \qquad (3\text{-}128)$$

式 (3-128) では, 添字と TT が見にくくなるのを避けるため, 添字はすべて下付きに書くことにして, 2 回現れるものは和をとることとしている．式 (3-128) は, 一般式であるが, 四重極波の場合に重力波の運ぶ角運動量を計算してみよう．式 (3-128) に (3-50) を代入すると

$$\frac{\mathrm{d}S_i^{\mathrm{GW}}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{8\pi}\int \epsilon_{ijk}\ < -6n_j\ddot{I\!\!\!-}_{km}\ \dddot{I\!\!\!-}_{mp}\ n_p$$

$$+ 9\ n_j\ddot{I\!\!\!-}_{km}\ n_m n_p \dddot{I\!\!\!-}_{pq}\ n_q > \ \mathrm{d}\Omega \qquad (3\text{-}129)$$

となるが, 式 (3-91) と (3-92) を使うと

$$\frac{\mathrm{d}S_i^{\mathrm{GW}}}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{5}\,\epsilon_{ijk}\ < \ddot{\rlap{-}I}_{km}\ \dddot{\rlap{-}I}_{mj}\ > \tag{3-130}$$

が得られる.

重力波の運ぶ角運動量を楕円軌道の連星の場合に求めてみよう. c と G をあからさまに入れて書くと

$$\frac{\mathrm{d}S_z^{\mathrm{GW}}}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{5}\,\frac{G}{c^5}\,[\dddot{\rlap{-}I}_{xy}\ (\ddot{\rlap{-}I}_{yy} - \ddot{\rlap{-}I}_{xx}) + \ddot{\rlap{-}I}_{xy}\ (\dddot{\rlap{-}I}_{xx} - \dddot{\rlap{-}I}_{yy})] \tag{3-131}$$

である. $\ddot{\rlap{-}I}_{xx}$, $\ddot{\rlap{-}I}_{yy}$, $\ddot{\rlap{-}I}_{xy}$ は,

$$\begin{aligned}\ddot{\rlap{-}I}_{xx} &= -\alpha\ (\cos 2\psi + e\cos^3\psi)\ ,\\ \ddot{\rlap{-}I}_{yy} &= \alpha\ (\cos 2\psi + e\cos^3\psi + e\cos\psi)\ ,\\ \ddot{\rlap{-}I}_{xy} &= -\alpha\ [\sin 2\psi + e\ (\sin\psi + \sin\psi\cos^2\psi)]\end{aligned} \tag{3-132}$$

$$\alpha = \beta\ \frac{[a(1-e^2)]^{\frac{3}{2}}}{(Gm_t)^{\frac{1}{2}}} \tag{3-133}$$

と計算されるので, 式 (3-108) を使うと

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}S_z^{\mathrm{GW}}}{\mathrm{d}t} = \frac{8}{5}\ \frac{G^3}{c^5}\ \frac{m_1^2 m_2^2 (Gm_{\mathrm{t}})^{\frac{1}{2}}}{(a\ (1-e^2))^{\frac{7}{2}}}\ &< (1+e\cos\psi)^2\ (4+10e\cos\psi\\ &+ e^2(1+5\cos^2\psi)\ )\ >\end{aligned} \tag{3-134}$$

を得る. 式 (3-111) と同様にして, 上の平均化を実行すると最終的に

$$\frac{\mathrm{d}S_z^{\mathrm{GW}}}{\mathrm{d}t} = \frac{32}{5}\ \frac{G^3}{c^5}\ \frac{m_1^2 m_2^2 (Gm_{\mathrm{t}})^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{7}{2}}\ (1-e^2)^2}\ \left(1+\frac{7}{8}\,e^2\right) \tag{3-135}$$

となる.

以上でわかったことは, ケプラーの法則に従って楕円軌道を運動している連星からは, 重力波が放出されて, その重力波の波形は円軌道の場合は式 (3-84) と (3-85) に従い, 一般には, 式 (3-112) に従って重力波はエネルギーを運び, 式 (3-135) のように角運動量を運ぶわけである. 全エネルギーと全角運動量は, 2-4 節で議論したように保存するから, これは, 連星のエネルギーと角運動量が変化することを意味する. すると, 軌道の長半径 a と離心率 e は変化することになるが, どのように変化するかを今から計算してみよう. 連星系の全エネルギーを $E(<0)$, 角運動量を J_z としよう. すると, a は E のみで決まって

$$a = -\frac{Gm_1m_2}{2E}\quad . \tag{3-136}$$

また, J_z は a と e と

$$J_z^2 = G\ \frac{m_1^2 m_2^2}{m_t}\ a\ (1-e^2) \tag{3-137}$$

の関係がある．多くの場合は，重力波によってエネルギーが変化する時間スケール $\tau_{\rm E}$ と角運動量が変化する時間スケール $\tau_{\rm J}$ は $P_{\rm b}$ に較べてはるかに長い．すなわち，

$$\tau_{\rm E} \equiv \frac{|E|}{L_{\rm GW}} \gg P_{\rm b} \ , \qquad \tau_{\rm J} \equiv J_z / \frac{{\rm d}S_z^{\rm GW}}{{\rm d}t} \gg P_{\rm b} \tag{3-138}$$

が成立する．このような時は，E と J_z が変化した時，a と e が準静的に変化すると考えてよい．したがって

$$\frac{{\rm d}E}{{\rm d}t} = -L_{\rm GW} = -\frac{32}{5} \ \frac{G^4 m_1^2 m_2^2 m_{\rm t}}{c^5 a^5 (1-e^2)^{\frac{7}{2}}} \ \left(1 + \frac{73}{24} \ e^2 + \frac{37}{96} \ e^4\right) \tag{3-139}$$

と

$$\frac{{\rm d}J_z}{{\rm d}t} = -\frac{{\rm d}S_z^{\rm GW}}{{\rm d}t} = -\frac{32}{5} \ \frac{G^3 m_1^2 m_2^2 (G m_{\rm t})^{\frac{1}{2}}}{c^5 a^{\frac{7}{2}} (1-e^2)^2} \, (1 + \frac{7}{8} e^2) \tag{3-140}$$

を a と e の時間変化を決める式と考えてよい．式 (3-139) より a の時間変化を決める式

$$\frac{{\rm d}a}{{\rm d}t} = -\frac{64}{5} \ \frac{G^3 m_1 m_2 m_{\rm t}}{c^5 a^3 \ (1-e^2)^{\frac{7}{2}}} \ \left(1 + \frac{73}{24} \ e^2 + \frac{37}{96} \ e^4\right) \tag{3-141}$$

が得られる．一方，ケプラーの法則より

$$\begin{aligned} \frac{G m_{\rm t}}{a^3} &= \left(\frac{2\pi}{P_{\rm b}}\right)^2 \\ \frac{1}{a} \ \frac{{\rm d}a}{{\rm d}t} &= \frac{2}{3} \ \frac{1}{P_{\rm b}} \ \frac{{\rm d}P_{\rm b}}{{\rm d}t} \end{aligned} \tag{3-142}$$

である．式 (3-142) を使うと式 (3-141) は軌道周期の減少を決める式と考えることができて

$$\frac{{\rm d}P_{\rm b}}{{\rm d}t} = -\ \frac{192\pi}{5} \left(\frac{P_{\rm b}}{2\pi}\right)^{-\frac{5}{3}} \frac{1}{(1-e^2)^{\frac{7}{2}}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4\right) \frac{G^2 m_1 m_2}{c^5} (G m_{\rm t})^{-\frac{1}{3}} \tag{3-143}$$

となる．式 (3-143) は次節での重力波の存在確認にとって重要な式になる．さて，式 (3-140) に戻って，今度は離心率 e の変化を求めよう．式 (3-137) より

$$2 \cdot \frac{1}{J_z} \ \frac{{\rm d}J_z}{{\rm d}t} = \frac{1}{a} \ \frac{{\rm d}a}{{\rm d}t} - \frac{2e}{1-e^2} \ \frac{{\rm d}e}{{\rm d}t} \tag{3-144}$$

であるから，${\rm d}J_z/{\rm d}t$ と ${\rm d}a/{\rm d}t$ に式 (3-140) と (3-141) を代入することにより

$$\frac{{\rm d}e}{{\rm d}t} = -\frac{304}{15} \ e \ \ \frac{G^3 m_1 m_2 m_{\rm t}}{c^5 a^4 (1-e^2)^{\frac{5}{2}}} \ \left(1 + \frac{121}{304} \ e^2\right) \tag{3-145}$$

を得る．式 (3-145) より，離心率は一般に減少することがわかる．すなわち，重力波放出によって a は減少するとともに，軌道は，楕円から円に近づくことになる．それでは，e は，a の関数と

して, どのように変化するのかが知りたくなるが, それは式 (3-141) の両辺を式 (3-145) の両辺で割ることによって得られて,

$$\frac{\mathrm{d}a}{a} = \frac{12}{19}\ \frac{1+\frac{73}{24}\ e^2+\frac{37}{96}\ e^4}{e\ (1-e^2)\ (1+\frac{121}{304}\ e^2)}\ \ \mathrm{d}e \tag{3-146}$$

式 (3-146) は積分できて

$$\frac{a}{a_0} = \frac{1-e_0^2}{1-e^2}\ \left(\frac{e}{e_0}\right)^{\frac{12}{19}}\ \left[\frac{1+\frac{121}{304}\ e^2}{1+\frac{121}{304}\ e_0^2}\right]^{\frac{870}{2299}} \tag{3-147}$$

となる. ここで, a_0 と e_0 は, 初期の長半径と離心率である. $a/a_0 \ll 1$ では,

$$e \sim \left(\frac{a}{a_0\ (1-e_0^2)}\right)^{\frac{19}{12}} e_0 \tag{3-148}$$

となって, たとえ初期に $e_0 \sim 1$ でも, e は 0 に近づくことがわかる.

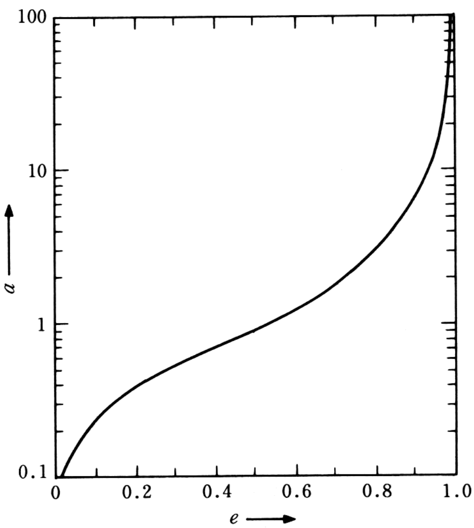


図 3-1　軌道長半径 a と離心率 e の関係. ただし $c_0 \equiv a_0(1-e_0)^2 e_0^{-\frac{12}{19}}(1+\frac{121}{304}e_0^2)^{-\frac{870}{2299}} = 1$ の場合である.

次に a が 0 になる. つまり連星が合体するまでに要する時間 t_c を計算しよう. まず $e_0 = 0$ の時は, (3-145) より $e(t) = 0$ であり, (3-141) は簡単に積分できて

$$a(t) = a_0\ \left(1-\frac{t}{t_c(a_0)}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$t_c\ (a_0) = \frac{5}{256}\ a_0^3\left(\frac{Gm_1}{c^2}\right)^{-1}\left(\frac{Gm_2}{c^2}\right)^{-1}\left(\frac{Gm_{\mathrm{t}}}{c^2}\right)^{-1}\left(\frac{a_0}{c}\right) \tag{3-149}$$

となる. いま, a_0 を太陽半径単位, 質量を太陽質量単位で測ると

$$t_c = 1.46\times 10^8\mathrm{y}\ \left(\frac{a_0}{R_\odot}\right)^4\left(\frac{m_1}{M_\odot}\right)^{-1}\left(\frac{m_2}{M_\odot}\right)^{-1}\left(\frac{m_1+m_2}{M_\odot}\right)^{-1} \tag{3-150}$$

となるが, 宇宙の年齢は 1.4×10^{10}y 程度と考えられているので, $m_1 \sim m_2 \sim 1M_{\odot}$ を考えるとき, $a_0 < 3R_{\odot}$ で円軌道なら, 重力波の放出によって連星が宇宙年齢内に合体する.

次に $e_0 \neq 0$ の場合を考えよう. 今度は $e \to 0$ になる時, 式 (3-147) によって $a \to 0$ になるから $e \to 0$ になる時間を $t_c(a_0,\ e_0)$ と考えればよい. 式 (3-147) の a を式 (3-145) に代入して e について e_0 から 0 まで積分することによって

$$t_c\ (a_0,\ e_0) = t_c\ (a_0)\ \frac{48}{19}\ \frac{(1-e_0^2)^4}{\left(1+\frac{121}{304}\ e_0^2\right)^{\frac{3480}{2299}}} \int_0^1 u^{\frac{29}{19}}\ \frac{\left(1+\frac{121}{304}\ e_0^2 u^2\right)^{\frac{1181}{2299}}}{(1-e_0^2u^2)^{\frac{3}{2}}} du \quad (3\text{-}151)$$

を得る. 式 (3-151) はもちろん $e_0 \to 0$ 極限で式 (3-149) の $t_c(a_0)$ になる. また $e_0 \to 1$ では

$$t_c(a_0,\ e_0) \cong t_c(a_0)\ (1-e_0^2)^{\frac{7}{2}} \quad (3\text{-}152)$$

で短くなる. $t_c(a_0,\ e_0)/t_c(a_0)$ を e_0 の関数として, 図 3-2 に示す.

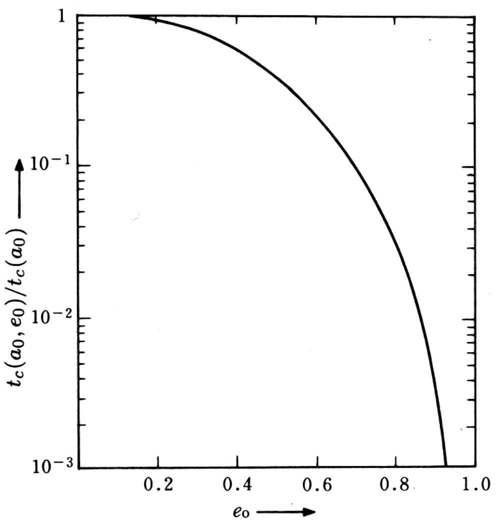


図 3-2　$t_c(a_0,e_0)/t_c(a_0)$ を e_0 の関数として示す.

図 3-2 を見ると $e_0 = 0.8$ だと 100 分の 1 くらい, $e_0 = 0.6$ だと 10 分の 1 くらい t_c が円の時と較べて短くなっているのがわかる. 軌道が楕円だと式 (3-105) より, 最も両星が近づく時には, 両星の距離は $d_{\min} = a(1-e)$ であるが, $e \to 1$ だと $d_{\min} \ll a$ となる. 距離が小さいときには重力波が大量に放出されるので, t_c が短くなる.

3-5　連星中性子星の発見と重力波の存在確認

第 2 章で, 一般相対性理論に従うと重力波が存在すること (他の重力理論でも, 第 8 章で詳しく論じられるが, 一般的には重力波は存在する), そして重力波は h_+ と $h_\times$ の 2 つの偏波成分を持ち光速で伝わることがわかった. さらに, 重力波はエネルギーと角運動量を運ぶ. 前節では連

星系からの重力波によるエネルギーと角運動量放出を詳しく調べた. その結果連星系の軌道周期が式 (3-143) に従って減少するはずであることが分かった. しかし, これらは, すべて理論的結論であって, たとえ 2-6 節で述べたようにアインシュタインによる一般相対性理論が, 太陽系内の実験で 0.1 ～1%の精度で確かめられていたとしても, 重力波の存在は実験的または観測的に確かめられる必要がある. ところが残念なことに, 重力波に関しては, 3-4 節で議論したように, 電磁波におけるヘルツの実験に対応する実験を地球上で行って重力波の存在を確認することは, ほぼ不可能である. この点が重力波と電磁波の大きな違いである. したがって, 地球外の天体からやってくる重力波を検出するか, 地球外の天体で重力波が放出されている現象を他の手段, 例えば電波天文学で確認するかのどちらかを考える必要がある. 前者はまだ成功しておらず, それをどのようにするのかが第 5 章以降の主なテーマであるが, 後者はハルスとテイラーによって成功しており, 彼らはその成果で 1993 年度ノーベル物理学賞を受賞した. 本節では, ハルスとテイラーの仕事を中心に論じる.

3-5-1　中性子星

1967 年 11 月 28 日の真夜中にケンブリッジ大学の電波天文学者ヒューイッシュの学生ベルは, 電波源のシンチレーション現象を観測していたが, 電波源の中に非常に強くて規則正しいパルスを放出しているものを発見した. その後 1ヶ月の観測で, パルス源は太陽系の外にあり, しかも周期は 1.3373011 秒という驚くべき正確さであることがわかった [Hewish, Bell, Pilkington, Scott and Collins 1968]. この大発見は地球外文明 (Little Green Man と名付けられた) からの通信という可能性も含めて, その後 1 年以上に及ぶ大論争を巻き起こした. この電波パルスを出す天体は, 電波パルサーと呼ばれているが, 現在では 700 個以上発見されており, その周期は最も短いもので 1.5 ミリ秒で, 約 0.5 秒のものが一番多くて, 周期の長いものは, 4 秒程度になる [Taylor, Manchester and Lyne 1993]. まず, このような規則正しい天体現象は, 天体の自転と関係していると考えるのが自然である (1968 年当時, 天体の振動とか連星説等も出されたが, それらは, 後に簡単に述べるように否定される). さて, この天体の質量を M, 半径を R, 回転角速度を Ω としよう. ここで我々は, M と R について, その大きさを何も仮定していないことに注意しよう. この天体がバラバラにならないためには, 遠心力は, 少なくとも重力より小さくなくてはならない. これは

$$\frac{GM}{R^2} > R\Omega^2 \tag{3-153}$$

を意味する. この天体の平均密度 $\bar{\rho}$ は

$$\bar{\rho} = \frac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3} \tag{3-154}$$

で与えられるから, 式 (3-153) は

$$\bar{\rho} > \frac{3}{4\pi}\frac{\Omega^2}{G} \tag{3-155}$$

と書き換えることができる. つまり, M と R についてはその大きさについて何も仮定しなかったが, 面白いことに平均密度については条件が出てくるのである. いま Ω として, 最も短い周期

(1.56 ms) に当たる

$$\Omega = \frac{2\pi}{1.56\mathrm{ms}} = 4 \times 10^3 \mathrm{rad\ s^{-1}} \tag{3-156}$$

を式 (3-155) に代入すると

$$\bar{\rho} > 5.7 \times 10^{13} \mathrm{g\,cm^{-3}} \tag{3-157}$$

となる．これは, とんでもない高密度である．この密度は原子核の密度に匹敵する．質量数 A の原子核の半径 R は

$$R_\mathrm{n} = 1.5 \times 10^{-13}\mathrm{cm} \quad A^{\frac{1}{3}} \tag{3-158}$$

であるので, 原子核の平均密度 ρ_nuc は,

$$\begin{aligned} \rho_\mathrm{nuc} &\sim \frac{1.67 \times 10^{-24}\mathrm{g} \cdot A}{\frac{4\pi}{3}\ R_\mathrm{n}^3} \\ &\sim 3 \times 10^{14} \mathrm{gcm^{-3}} \end{aligned} \tag{3-159}$$

となる．ここで，1.67×10^{-24}g は核子の質量である．したがって, 式 (3-157) の密度は, 原子核がぎしぎしに詰まった状態に近いことを意味する．このような高密度では, 物質の圧力 p は, 密度 ρ と温度 T の関数として, どのようになっているのか大変興味深いが, 定性的にはまずこの物質は中性子を主成分としているはずであることが以下に説明するようにわかる．通常我々が知っている物質では, 陽子の数 : 中性子の数 : 電子の数の比は = 1 : 1 : 1 である．さて, この比を保ったまま, 密度が $10^{14}\mathrm{g\,cm^{-3}}$ を越えるとどうなるであろうか．電子は, パウリの排他律のため h^3 の位相体積内 (ここで h はプランク定数) にスピン up と down の 2 個しか存在できない．簡単のため温度ゼロとすると, 電子密度 n_e を与えた時フェルミ運動量を p_F として p_F までのすべての位相体積を電子が埋めるから

$$2 \times \frac{4\pi}{h^3} \int_0^{p_\mathrm{F}} p^2 dp = n_\mathrm{e} \tag{3-160}$$

が成立する．陽子と中性子の質量を m_p, m_n とすると, n_e は密度 ρ と

$$\rho = (m_\mathrm{p} + m_\mathrm{n}) n_\mathrm{e} \tag{3-161}$$

と結びついているので

$$p_\mathrm{F} = h \left(\frac{3}{8\pi} \ \frac{\rho}{(m_\mathrm{p} + m_\mathrm{n})} \right)^{\frac{1}{3}} \tag{3-162}$$

となる．電子の質量を m_e とすると, フェルミエネルギー E_F は

$$E_\mathrm{F} = \sqrt{m_\mathrm{e}^2 c^4 + p_\mathrm{F}^2 c^2}$$

となるが, $\rho \gtrsim 10^{14}\mathrm{g\,cm^{-3}}$ を考えているので

$$E_\mathrm{F} = 200\mathrm{MeV} \cdot \left(\frac{\rho}{10^{14}\mathrm{g\,cm^{-3}}} \right)^{\frac{1}{3}} \tag{3-163}$$

となる．$E_{\rm F}$ は陽子と中性子の質量差 1.29 MeV よりはるかに大きいので，これは，陽子が電子捕獲して中性子になることを意味する．

$$\rm p + e^- \longrightarrow n + \nu_e$$

したがって上の反応が起こって物質内では中性子の数が増える．つまり，パルサーのような高密度な天体は，中性子を主体とした中性子星になっているはずなのである．この中性子星は，パルサーが発見されるはるか以前に Badde and Zwicky [1934] が理論的に考察し，Oppenheimer and Volkoff [1939] が球対称平衡解を考えていた超高密度星で，パルサーの発見によってその存在が初めて確認されたのであった．

それでは，中性子星の球対称平衡解を考えてみよう．簡単のため温度はゼロとする．この時，状態方程式は圧力 p が密度 ρ のみの関数となって

$$p = p(\rho) \tag{3-164}$$

と与えられるはずである．中心から半径 r の球面内に含まれる質量を $m(r)$ とおくと

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho r^2 {\rm d}r \tag{3-165}$$

である．まず，ニュートン力学で考えると，式 (1-44) で $v_i = 0$ とおいて，r 方向のみを考えて

$$\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \tag{3-166}$$

重力は球対称な場合

$$-\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{Gm(r)}{r^2} \tag{3-167}$$

で与えられるので，式 (3-166) は

$$\frac{{\rm d}\rho}{{\rm d}r} = -\frac{Gm(r)}{r^2}\ \rho \cdot \left(\frac{{\rm d}p}{{\rm d}\rho}\right)^{-1} \tag{3-168}$$

となる．式 (3-165) と (3-168) は，次のようにして解けばよい．$r = 0$ での中心密度 $\rho_{\rm c}$ を与える．式 (3-165) より，中心近傍では

$$m = \frac{4\pi}{3}\ \rho_c r^3 \tag{3-169}$$

これを (3-168) に代入すると

$$\rho = \rho_c - \frac{2\pi G}{3}\ \rho_c\ c_s^{-2}\ r^2 \tag{3-170}$$

ここで $c_s = \sqrt{\frac{{\rm d}p}{{\rm d}\rho}}\Big|_{\rho=\rho_c}$ は音速である．したがって，

$$\frac{{\rm d}\rho}{{\rm d}r} = -\frac{Gm(r)}{r^2}\ \rho \cdot \left(\frac{{\rm d}p}{{\rm d}\rho}\right)^{-1}$$
$$\frac{{\rm d}m}{{\rm d}r} = 4\pi\rho r^2 \tag{3-171}$$

という連立常微分方程式を, 中心から少しはずれた r_1 を出発点として

$$\rho(r_1) = \rho_c - \frac{2\pi G}{3}\ \rho_c^2\ c_s^{-2}\ r_1^2$$

$$m(r_1) = \frac{4\pi}{3}\ \rho_c\ r_1^3 \tag{3-172}$$

という初期条件のもとで, 外側に向いて解いていけばよい. 式 (3-171) より, $c_s^2 > 0$ なら, ρ は r の減少関数であるので, いつかある半径 R で $\rho = 0$ となる. この R が中性子星の表面となり, $m(R)$ が中性子星の質量 M となる. つまり, 状態方程式が与えられるたびに, 中性子星の半径と質量は, 中心密度 ρ_c の関数として与えられることになる.

さて, 中性子星の質量が 1 $M_\odot$ 程度であるとしよう. すると, ニュートン力学の範囲では, $\bar{\rho} \sim 10^{14}\mathrm{g\,cm^{-3}}$ に対して, 中性子星の半径 R は

$$R = \left(\frac{3}{4\pi}\ \frac{M_\odot}{\bar{\rho}}\right)^{\frac{1}{3}} = 16.8\mathrm{km} \tag{3-173}$$

となるが, この時星の表面におけるニュートン極限での g_{00} は, 式 (2-215) より

$$g_{00} = -\left(1 - \frac{2GM_\odot}{c^2 R}\right) = -0.83 \tag{3-174}$$

となって, ニュートン力学では, 近似はよくないことがわかる. そこで, 一般相対性理論を含んだ球対称な星の重力平衡を解く必要が生じる.

球座標 $(r,\ \theta,\ \varphi)$ を採用して, $r =$ 一定の球面の表面積が $4\pi r^2$ になる r を採用すると, 球面のメトリックは $r^2\ (\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\ \mathrm{d}\ \varphi^2)$ となる. 球対称平衡解を求めているから, すべてのメトリックテンソルは t によらないし, $g_{rt} = 0$ ともおける. そうすると, メトリックテンソルは,

$$\mathrm{d}s^2 = -e^{2\Phi(r)}\mathrm{d}t^2 + A^2\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2) \tag{3-175}$$

と書ける. ニュートン力学の式によりよく対応する, 第 1 章で議論した (3+1) 次元形式でのアインシュタイン方程式を使おう. $\beta_i = 0$ で, しかも γ_{ij} は時間によらないから, (1-70) より $K_{ij} = 0$, また $J_i = 0$ であるから, 式 (1-76) の運動量拘束方程式は, 自動的に満たされる.

さて, 3 次元のリッチテンソルであるが, まず 3 次元空間のクリストッフェル記号は

$$^{(3)}\Gamma^r_{rr} = \frac{1}{A}\ \frac{\partial A}{\partial r}\ ,\quad ^{(3)}\Gamma^r_{\theta\theta} = -\frac{r}{A^2}\ ,\quad ^{(3)}\Gamma^r_{\varphi\varphi} = -\frac{r\sin^2\theta}{A^2}\ ,$$

$$^{(3)}\Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta\ ,\quad ^{(3)}\Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{r}\ ,$$

$$^{(3)}\Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \cot\theta\ ,\quad ^{(3)}\Gamma^\varphi_{\varphi r} = \frac{1}{r} \tag{3-176}$$

以外はゼロである. リッチテンソルは,

$$^{(3)}R_{ij} = \frac{\partial\Gamma^l_{ij}}{\partial x^l} - \frac{\partial\Gamma^l_{il}}{\partial x^j} + \Gamma^l_{ml}\ \Gamma^m_{ij} - \Gamma^m_{li}\ \Gamma^l_{mj} \tag{3-177}$$

とかける. 公式を使うと計算が楽になる. すなわち

$$^{(3)}R_{ij} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\ \frac{\partial}{\partial x^l}\ (\sqrt{\gamma}\ \Gamma^l_{ij}) - \frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}\ \ln\sqrt{\gamma} - \Gamma^m_{li}\ \Gamma^l_{mj} \tag{3-178}$$

ここで, $\sqrt{\gamma} = \sqrt{\det(\gamma_{ij})} = Ar^2 \sin\theta$ である. 式 (3-176) を (3-178) に代入して

$$
\begin{aligned}
{}^{(3)}R_{rr} &= \frac{2}{r}\ \frac{1}{A}\ \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r}\ , \\
{}^{(3)}R_{\theta\theta} &= \bigl(1 - \frac{1}{A^2}\bigr) + \frac{r}{A^3}\ \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r} \\
{}^{(3)}R_{\varphi\varphi} &= \Bigl\{\bigl(1 - \frac{1}{A^2}\bigr) + \frac{r}{A^3}\ \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r}\Bigr\}\ \sin^2\theta \\
{}^{(3)}R_{r\theta} &= {}^{(3)}R_{r\varphi} = {}^{(3)}R_{\theta\varphi} = 0
\end{aligned}
\tag{3-179}
$$

を得る. 式 (3-179) より

$$
\begin{aligned}
{}^{(3)}R &= {}^{(3)}R^r_r + {}^{(3)}R^\theta_\theta + {}^{(3)}R^\varphi_\varphi \\
&= 2\ \Bigl\{\bigl(1 - \frac{1}{A^2}\bigr)\ \frac{1}{r^2} + \frac{2}{r}\ \frac{1}{A^3}\ \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r}\Bigr\}
\end{aligned}
\tag{3-180}
$$

となるが, $\rho_H = \rho + \rho\epsilon$, $S_{ij} = p\gamma_{ij}$, $S^l_l = 3p$ に注意して, ハミルトニアン拘束方程式より

$$
\bigl(1 - \frac{1}{A^2}\bigr)\ \frac{1}{r^2} + \frac{2}{r}\ \frac{1}{A^3}\ \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r} = 8\pi(\rho + \rho\epsilon) \tag{3-181}
$$

式 (3-181) は A について積分できて

$$
\begin{aligned}
A^2 &= \Bigl(1 - \frac{2m(r)}{r}\Bigr)^{-1} \\
m(r) &= 4\pi \int_0^r (\rho + \rho\epsilon) r^2 \mathrm{d}r
\end{aligned}
\tag{3-182}
$$

となる. (3-182) の m を使うと, $R_{\theta\theta}$ は書き換えることができて,

$$
R_{\theta\theta} = \frac{m}{r} + 4\pi\ (\rho + \rho\epsilon)\ r^2 \tag{3-183}
$$

メトリックの時間発展の方程式 (1-77) の $\theta\theta$ 成分から

$$
\frac{m}{r} + 4\pi r^2 p - \frac{r}{A^2}\ \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} = 0 \tag{3-184}
$$

式 (3-184) は,

$$
\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} = -\frac{m}{r^2}\ \bigl(1 + \frac{4\pi r^3 p}{m}\bigr)\ \bigl(1 - \frac{2m}{r}\bigr)^{-1}
$$

と書き換えられるので, ニュートン極限では, Φ は

$$
\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} = -\frac{m}{r^2}
$$

で与えられることがわかる. 一方, 運動方程式 (1-84) の r 成分より

$$
\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = -(\rho + \rho\epsilon + p)\ \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} \tag{3-185}
$$

式 (3-184) を (3-185) に代入して, G と c をあからさまに書くと,

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = -\frac{Gm}{r^2}\ (\rho + \rho\epsilon)\ f \tag{3-186}$$

$$f = \left(1 + \frac{4\pi r^3 p}{mc^2}\right)\left(1 + \frac{p}{(\rho + \rho\epsilon)\ c^2}\right)\left(1 - \frac{2Gm}{rc^2}\right)^{-1} > 1$$

となる．いま物質のエネルギー密度で定義される密度を ρ_{E} とし，

$$\rho_{\mathrm{E}} = \left(\rho + \rho\ \frac{\epsilon}{c^2}\right) \tag{3-187}$$

圧力 p が ρ_{E} の関数として表されるとすると，一般相対論的な球対称な星の平衡解は，

$$\frac{\mathrm{d}\rho_{\mathrm{E}}}{\mathrm{d}r} = -\frac{Gm}{r^2}\ \rho_{\mathrm{E}}\ \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho_{\mathrm{E}}}\right)^{-1}\ f$$

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}r} = 4\pi r^2 \rho_{\mathrm{E}} \tag{3-188}$$

となって式 (3-171) に較べて f という 1 より大きな係数がかかるが，ニュートン力学と同様な式を解けばよいことがわかった．式 (3-188) は，Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) 方程式 [Oppenheimer and Volkoff 1939] と呼ばれているが，ニュートンの時と同様に ρ_{E} の中心での値の関数として中性子星の半径 R, 重力質量

$$M_{\mathrm{g}} = 4\pi \int_0^R \rho_{\mathrm{E}} r^2\ \mathrm{d}\ r \tag{3-189}$$

が決定される．なぜ式 (3-189) が重力質量と呼ばれるかというと，式 (3-184) で Φ を解く時には，$r \to \infty$ で $\Phi = 0$ という条件で，解く必要がある．そうでないと $r \to \infty$ でミンコフスキー空間 $\mathrm{d}s^2 = \eta_{\mu\nu}\ \mathrm{d}x^\mu\ \mathrm{d}x^\nu$ にならないからであるが，そうすると $r > R$ では

$$\Phi = \int_r^\infty \frac{M_{\mathrm{g}}}{r^2}\ \frac{\mathrm{d}r}{(1 - \frac{2M_g}{r})} = \ln\ \sqrt{1 - \frac{2M_{\mathrm{g}}}{r}} \tag{3-190}$$

よって $r > R$ では

$$g_{00} = -\left(1 - \frac{2M_{\mathrm{g}}}{r}\right) \tag{3-191}$$

ということになる．ニュートン極限 (2-215) から十分遠方で試験粒子は，中性子星が M_{g} という質量を持った場合と同じ運動をする．こういう意味で M_{g} を重力質量と呼ぶ．一方，全静止エネルギー M_0 は ρ に $\sqrt{\gamma}\ \mathrm{d}^3x$ をかけて積分したものだから

$$M_0 = 4\pi \int_0^R \rho\ \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} r^2 \mathrm{d}r \tag{3-192}$$

となって，一般には $M_0 \neq M_{\mathrm{g}}$ である．

図 3-3 に各種の状態方程式の場合に重力質量 M を太陽質量単位で中心密度 ρ_c の関数として示した．一般的な特徴は，状態方程式を固定すると，初め M は ρ_c とともに増加するが，ある ρ_c で最大値をとって，その後 ρ_c の関数として減少する．中性子星には，このように最大質量が存在す

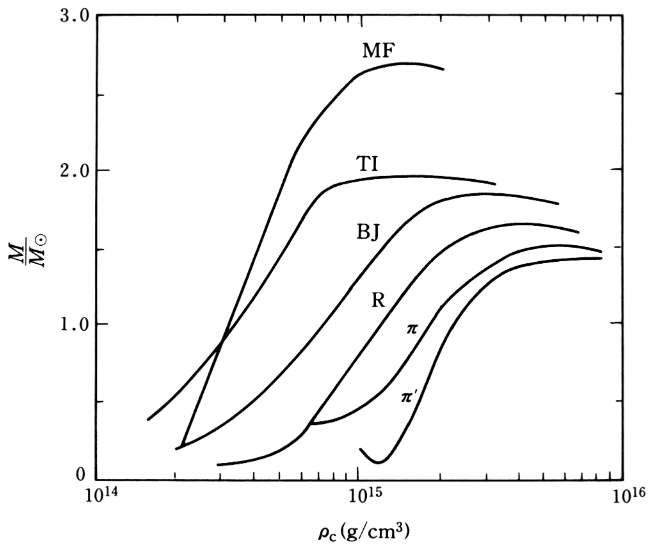


図 3-3　中性子星の中心密度と質量の関係. 各曲線はそれぞれの状態方程式に対応している. MF (Mean Field), TI (Tensor Interaction), BJ (Bethe Johnson), R (Reid), π (π-on condensation). それぞれの詳しい意味は Baym and Pethick [1979] を参照.

る. このことは, 状態方程式の詳細によらずに証明されている [Rhodes and Ruffini 1974, Chitre and Hartle 1976, Hartle 1978].

すなわち

1) アインシュタイン方程式が正しい.
2) 球対称.
3) 物質の音速 (c_s) は光速以下である. (すなわち $c_s < c$)
4) $\rho \lesssim \rho_{nuc}$ で状態方程式はわかっているとする.

という一般的な仮定の下で最大質量は, 3 $M_\odot$ であることが証明できる. 図 3-3 の MF は, 平均場モデルという極端な例で, 実際には最大質量は 2 $M_\odot$ 程度以下と考えられている. π というのはパイ中間子の凝縮を考えたソフトな状態方程式で, そのために最大質量がもっとも小さくなっている. どちらにしても, どの状態方程式が現実に近いかは, 理論的にも現実的にも決まっていないのが現状で, もし, 重力波を用いて状態方程式を決めることができれば, それは大変重要な意味を持つ. 図 3-4 には, 中性子星の半径と質量の関係を示した. まず半径が ~10km 程度になることがわかる. 同じ質量では, ソフトな状態方程式ほど半径が小さい. これは, 半径を小さくすることによって, 圧力勾配 (dp/dr) を大きくして重力に釣り合わせるようになるためである. また, 同じ状態方程式では, 質量が小さくなると半径が大きくなることがわかる. これは, 質量が小さいため, 重力が弱いので, 小さな圧力勾配 (dp/dr) でも星を支えられるからである. したがって半径と質量の関係は状態方程式の特徴を反映していることになる. もし, 中性子星の質量と半径をいくつも決めることができれば, 逆に未知の高密度の状態方程式が決まる [Lindblom 1992].

中性子星が, パルサーに要求される式 (3-155) を満たし, 第 1 章で簡単に触れ, 第 4 章でさらに詳しく述べるように, 質量 $M \gtrsim 10\ M_\odot$ の星の進化の最終段階で中性子星は形成されると考えら

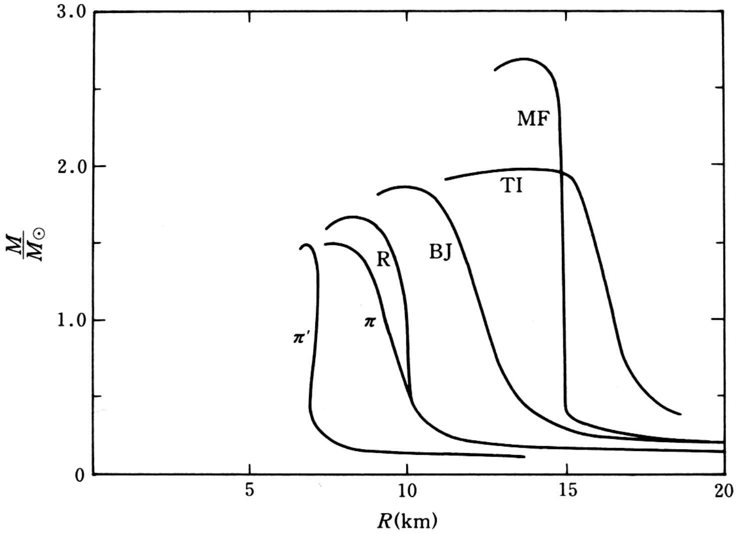


図 3-4 中性子星の半径と質量の関係. 質量が小さくなると半径が増大することに注意. [Baym and Pethick 1979]

れているので, 電波パルサー = 中性子星という考えが今や確立されていることが分かった. しかし, 1968 年頃にはいろいろな説があった. その 1 つとして, 単独の中性子星ではなく, 中性子星の連星説があった. このような説は, 重力波放出によって, すぐにパルサーの周期が短くなることで否定できる. 実際 $m_1 = m_2 = 1M_\odot$ で, 周期 1 秒の連星を考えると, ケプラーの法則 (式 (3-80)) より円軌道の半径 a_0 は

$$a_0 = \left(\frac{G \times 2M_\odot}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} = 1.9 \times 10^8 \text{cm} = 2.7 \times 10^{-3} R_\odot \tag{3-193}$$

となるが, これを式 (3-150) に代入して

$$t_c = 2.8 \text{ 日} \tag{3-194}$$

となる. つまり, 3 日もしないうちに重力波放出によって連星は合体してしまい, それまでパルサーであったとしてもパルサーでなくなってしまう.

観測的には, 小さな割合で Ω は減少することが知られている. これは, パルサーの周期 P が増大するわけで, その割合は

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = 10^{-20}\text{ss}^{-1} \sim 10^{-13}\text{ss}^{-1} \tag{3-195}$$

である. (3-195) は, 一年間にパルス周期が長くなる割合はせいぜい 3μs 程度であることを示している.

図 3-5 に観測されたパルサーの P と $\dot{P}$ を示しておく. 例えば, 牡牛座のカニ星雲中のパルサーは, パルス周期 P は 33 ms で, $\dot{P} = 4 \times 10^{-13}\text{ss}^{-1}$ である. 一方, 自転に伴う回転エネルギー E_{rot} は中性子星の慣性モーメントを I として

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\, I\, \Omega^2 \tag{3-196}$$

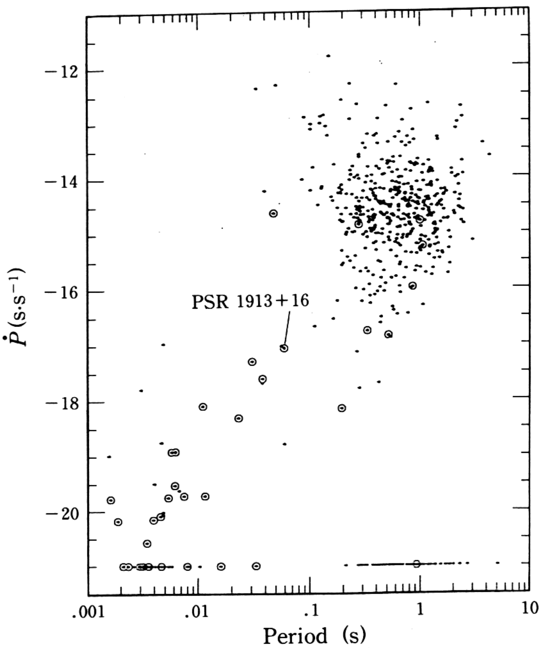


図 3-5　パルサーのスピン（自転）周期 P と $\dot{P}$ の図 [Taylor 1993].

である. P は増大しているのだから, $E_{\rm rot}$ は減少していて

$$\frac{\mathrm{d}E_{\rm rot}}{\mathrm{d}t} = -\frac{4\pi^2 I}{P^3}\ \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} < 0 \tag{3-197}$$

いま, I として, $M = 1.4M_{\odot} = 2.8 \times 10^{33}$g, $R = 10$km という典型的な中性子星に対する値

$$I \sim \frac{2}{5}\ MR^2 \sim 10^{45}\mathrm{g\ cm^2} \tag{3-198}$$

を用いると

$$\frac{\mathrm{d}E_{\rm rot}}{\mathrm{d}t} = -4 \times 10^{38}\mathrm{erg\ s^{-1}} \tag{3-199}$$

となる. 式 (3-199) はカニ星雲全体のエネルギー源として, 高エネルギー粒子として放出されていると考えて, いろいろな観測事実と合っているが, 中性子星自身では, 磁気双極子放射と釣り合っていると考えることができる. すなわち, 中性子星が磁気双極モーメント $\mathbf{m}$ を持っていて, $\mathbf{m}$ に回転軸に垂直な成分 $m_{\perp}$ が存在していると, 磁気双極放射の公式より中性子星は [ランダウ／リフシッツ場の古典論 1964a], エネルギーを次式にしたがって失う.

$$\frac{\mathrm{d}E_{\rm rot}}{\mathrm{d}t} = -\frac{2}{3c^3}\left(\frac{\mathrm{d}^2 m_{\perp}}{\mathrm{d}t^2}\right)^2 = -\frac{2\Omega^4}{3c^3}\ m_{\perp}^2 \tag{3-200}$$

これが, 式 (3-197) の右辺に等しいとすると

$$\frac{2\Omega^4}{3c^3}\ m_{\perp}^2 = \frac{4\pi^2 I}{P^3}\ \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} \tag{3-201}$$

が成り立つ. $m_\perp$ は中性子星の表面で回転軸に垂直な方向の磁場 $B_\perp$ が

$$B_\perp \simeq \frac{m_\perp}{R^3}$$

となることを意味するので, 式 (3-201) は I, R, $\dot{P}$ と P を与えると B を評価する式となる. $I = 10^{45}\mathrm{gcm}^2$, $R = 10\mathrm{km}$ とすると,

$$B_\perp = 3.5 \times 10^{12}\mathrm{G}\left(\frac{P}{33\mathrm{ms}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\dot{P}}{4 \times 10^{-13}\mathrm{ss}^{-1}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3-202}$$

となって, パルサーは, 超強磁場を持っていると推定されている. 10^{12}G (10^8T) というような磁場は異常に大きいと思うかもしれないが, 太陽は, 平均では 10G , 黒点では 10kG の磁場を持っていることが知られている. 太陽とパルサーの違いは密度の違いである. しかし全磁束は

$$\begin{aligned} 10^{12}\mathrm{G} \times (10^6\mathrm{cm})^2 &= 10^{24}\mathrm{G\ cm}^2 \\ &\sim 100\mathrm{G} \times (10^{11}\mathrm{cm})^2 \end{aligned} \tag{3-203}$$

であるので, そんなに変わらない. つまり, 磁束を保存して, 太陽のような恒星を中性子星の密度にまですると, 10^{12}G という磁場になる.

(3-202) の左辺の $B_\perp$ は変化しないとするとカニ星雲のパルサーの場合

$$P\dot{P} = \text{一定} = 1.2 \times 10^{-14}\mathrm{s} \tag{3-204}$$

式 (3-204) を積分して

$$t = \frac{P}{2\dot{P}} = 10^3\mathrm{yr}$$

となって 1054 年に形成されたという記録と矛盾しない. 自転エネルギーが具体的にどのようにして, 電波パルサーになるかについては諸説あるが, 現在電波パルサーは図 3-6 に示すように中性子星の回転軸と磁軸が異なっているために, 磁軸の方向に放射された電波ビームが, 丁度燈台のサーチライトのようにある方向から見ると, 規則正しいパルス状の電波として見えると考えられている. ベルが人類では初めてこのパルスを見たというわけであったのだ.

なお, 中性子星とパルサーについて, もっと詳しく勉強したい人は, 例えば, Shapiro & Teukolsky [1983] の "Black Hokes, White Dwarfs & Neutron Stars" とその中の参照文献を調べて欲しい. なお, ベルの先生のヒューイッシュと電波天文学の開拓者ライルは 1974 年にノーベル物理学賞を受賞した.

3-5-2 連星中性子星の発見

前節で述べたように中性子星は電波パルサーとして発見された. その後, 電波天文学者は早速パルサーはどんな周期のものが空間的にどのように分布しているかの調査に着手し, 1974 年時点ですでに約 100 個の電波パルサーが発見されていた. 1974 年の夏, マサチューセッツ大学のテイラー教授と彼の大学院生ハルスはプエルトリコのアレシボにある世界一大きな電波望遠鏡 (直径 300m) を使ってパルサーサーチを行っていた (このあたりの事情は Will [1986] に詳しい).

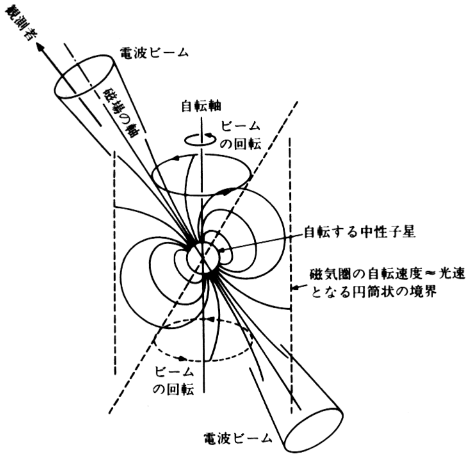


図 3-6　パルサーのモデル. 高速で自転する中性子星の強力な磁場のため, 磁極の方向に強い電波ビームが生じるものと考えられる. [赤羽・海部・田原 1988]

問題のパルサー PSR1913+16 (赤径 19 時 13 分, 赤緯 16° にある電波パルサーという意味) のパルス周期は約 59 ミリ秒であることがわかったが, 7 月 2 日, 12 日と 8 月 25 日に観測してパルス周期を正確に決めようとしたが, ハルスとテイラーは観測事実に当惑してしまった. 普通パルサーの自転周期は 6 桁以上の精度で決まる. 最も精度よく決まっているパルサー PSR1855+09 と PSR1937+21 では自転周期は ms 単位でそれぞれ 5.36210045404154(3) と 1.557806468819794(2) というように 15 桁の精度で決まっている [Kaspi, Taylor and Ryba 1994]. この 2 つのパルサーは原子時計の精度を追い抜きつつあると言われている (昔は地球の自転を時計にしていたのだから, 中性子星の自転が最もよい時計になるのは, 何も不思議なことではない). このように電波パルサーのパルス周期はきわめて規則正しいものであるにも拘わらず PSR1913+16 では, 測定した 2 つのデータの間で周期が $30\mu s$ も違った. これは異常である. というのは (3-195) で述べたように, パルサーの周期は, 1 年間に $3\mu s$ 長くなる程度だからである. 観測装置やデータ解析法に問題はなかった. それどころか 9 月 1 日と 2 日のデータでは増加すべき自転周期が減少したのである. これが本当なら電波パルサーは何かからエネルギーを得たことになる. 一体それは, 何なのだろうか.

このパズルは PSR1913+16 が単独星ではなく, 連星系の一方だとすると何の不思議もなく解決することができる. 実際多くの主系列星を含めた恒星は単独ではなく連星 (2 重星) ないしは 3 重星であることが知られている [理科年表 1995, Batten 1973]. したがって単純には電波パルサーが連星系の中にあってもよい. しかし, PSR1913+16 の発見以前は, すべて単独星であったのだ. パルサーが連星系の一方であるなら, パルサーは, 我々に対して近づいてくる場合も遠ざかっている場合もある. 近づいてくる時には, ドップラー効果で振動数は増える. これは, パルス周期が短く見えることを意味する. 逆にパルス周期の変化から視線方向の速度を決定することができる. 速度を時間について積分すれば, 軌道についての情報を得ることができる.

どのようにして軌道についての情報を得られるかを見るために, まず, ケプラー問題の楕円軌道について復習しておこう. [ランダウ／リフシッツ 1964b] 質量 m_1 , m_2 の星の相対運動は 1 つ

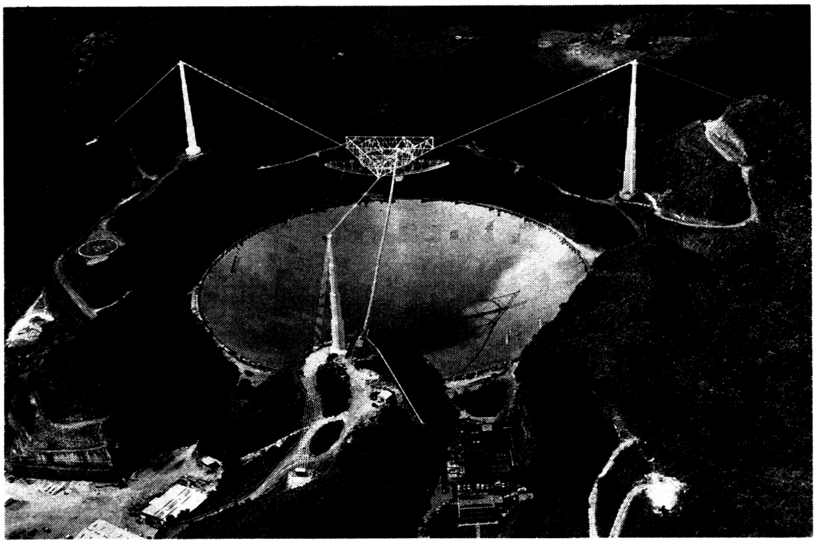


図 3-7　アレシボ (プエルトリコ) の 300 m 固定球面鏡. ドリーネ地形を利用して作られた, 世界最大の電波望遠鏡である. [赤羽・海部・田原 1988]

の平面内にあってラグランジアンは,

$$L = \frac{\mu}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + \frac{Gm_1m_2}{r} \tag{3-205}$$

である. ここで μ は換算質量

$$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} \tag{3-206}$$

である. φ 方向の運動方程式より

$$\mu r^2\dot{\varphi} = \text{一定} = J_z \tag{3-207}$$

エネルギーを E とすると, エネルギー保存は,

$$E = \frac{\mu}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - \frac{Gm_1m_2}{r} \tag{3-208}$$

であるが, 角運動量の保存 (式 (3-207)) を使うとエネルギー保存は,

$$E = \frac{\mu\dot{r}^2}{2} + \frac{J_z^2}{2\mu r^2} - \frac{Gm_1m_2}{r} \tag{3-209}$$

となる. $\dot{r}$ について解くと

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - \frac{J_z^2}{2\mu r^2} + \frac{Gm_1m_2}{r}\right)} \tag{3-210}$$

これを積分して r と t との関係が求められる.

$$t - t_0 = \int\left[\frac{2}{\mu}\left(E - \frac{J_z^2}{2\mu r^2} + \frac{Gm_1m_2}{r}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}r \tag{3-211}$$

一方, r と φ の関係は, (3-207) より $\dot{\varphi} = J_z/\mu r^2$ であるから, (3-210) を $\dot{\varphi}$ で割り算することにより

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{r^2}{J_z}\sqrt{2\mu\left(E - \frac{J_z^2}{2\mu r^2} + \frac{Gm_1m_2}{r}\right)} \tag{3-212}$$

(3-212) の解は

$$\cos\ (\varphi - \varphi_0) = (\frac{1}{r} - \frac{Gm_1m_2\mu}{J_z^2})(\frac{2\mu E}{J_z^2} + \frac{G^2m_1^2m_2^2\mu^2}{J_z^4})^{-\frac{1}{2}} \tag{3-213}$$

となる. (3-213) は楕円を表す. すなわち

$$p = \frac{J_z^2}{Gm_1m_2\mu}\ , \qquad e = \sqrt{1 + \frac{2EJ_z^2}{G^2m_1^2m_2^2\mu}} \tag{3-214}$$

として

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\ (\varphi - \varphi_0)} \tag{3-215}$$

となる. 楕円の長半軸 a と短半軸 b は

$$a = \frac{p}{1-e^2} = -\frac{Gm_1m_2}{2E}\quad , \qquad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{J_z}{\sqrt{2\mu|E|}} \tag{3-216}$$

である. そこで E と J_z を a と e で表した

$$E = -\frac{Gm_1m_2}{2a} \tag{3-217}$$

$$J_z^2 = Gm_1m_2\mu a\ (1 - e^2) \tag{3-218}$$

を (3-211) に代入して整理すると

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{\mu a}{Gm_1m_2}}\int\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{a^2e^2 - (r-a)^2}} \tag{3-219}$$

を得る. (3-219) は

$$(r - a) = -ae\cos u \tag{3-220}$$

とおくと, ケプラーの方程式

$$\frac{2\pi(t - t_0)}{P_\mathrm{b}} = u - e\sin u \tag{3-221}$$

が出てくる. ここで, P_b は, 楕円軌道の軌道周期である. 式 (3-221) より t を与えると, u が決まる. その u を使うと式 (3-220) より

$$r = a\ (1 - e\cos u) \tag{3-222}$$

ゆえ, r が t の関数として陰的にわかることになる. また, φ は, $p = a(1-e^2)$ だから, 式 (3-222) を (3-215) に代入して,

$$1 - e\cos u = \frac{1-e^2}{1+e\cos\,(\varphi-\varphi_0)} \tag{3-223}$$

または

$$\tan\,\frac{\varphi-\varphi_0}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\tan\,\frac{u}{2} \tag{3-224}$$

となって, φ は u の関数, 従って t の関数として決まる. さらに, 速度については式 (3-219) より

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{Gm_1m_2}{\mu a}}\;\frac{\sqrt{a^2e^2-(r-a)^2}}{r} \tag{3-225}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{r^2}\;\sqrt{\frac{Gm_1m_2}{\mu}\,a\,(1-e^2)} \tag{3-226}$$

より, やはり t の関数として分かる.

以上で準備が整ったので, パルス周期の変化から得られる視線方向の速度曲線 (図 3-8) から, 軌道について得られる情報が何かを調べてみよう [Aitken 1964, 石田 1975]. 今から説明するの

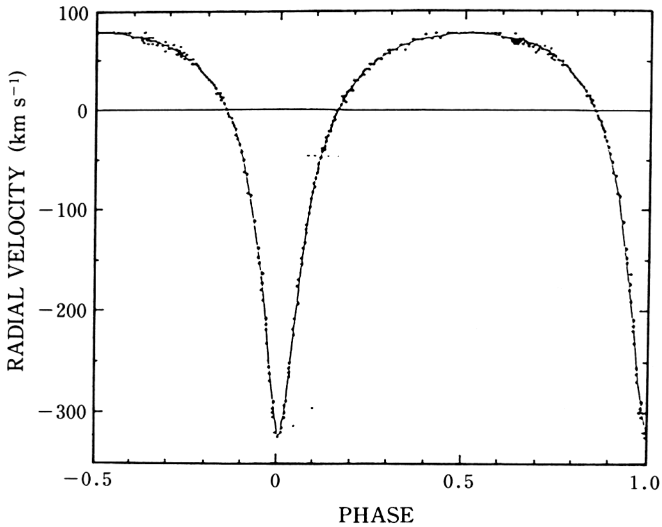


図 3-8　連星パルサーの速度曲線. 位相は公転周期に対応している.

は Lehmann-Filhés 法と呼ばれているものである. パルサーを星 1 , 伴星を星 2 と呼ぼう. まず, 地球に対する連星の重心の速度の視線成分 $\bar{V}_0$ は星 1 の視線速度 V_{r_1} を積分することによって

$$\bar{V}_0 = \frac{1}{P_{\rm b}}\int_0^{P_{\rm b}} V_{r_1}{\rm d}t \tag{3-227}$$

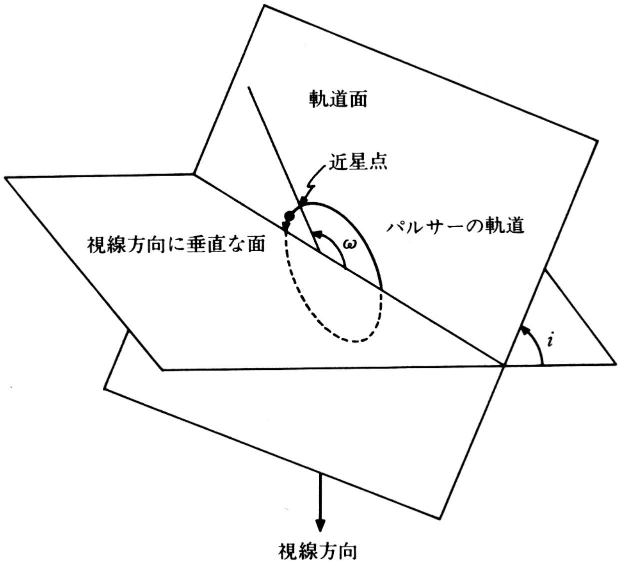


図 3-9　パルサーの軌道と近星点離角 (ω). i は軌道傾斜角.

決まる. 今後は相対運動にのみ興味があるので, $\tilde{V}_{r_1} = V_{r_1} - \bar{V}_0$ を考える. 図 3-9 のように重心を通り視線方向に垂直な面と軌道面のなす 角を i, 2 つの面の交線から, 近日点 (近星点) までの角度を ω とする. 星 1 の位置を $(r_1,\ \varphi)$ とする. ここで角度 φ は近星点でゼロとするようにとる (すなわち $\varphi_0 = 0$). すると, 式 (3-215) より

$$r_1 = \frac{a_1\ (1-e^2)}{1+e\cos\varphi} \tag{3-228}$$

ここで

$$a_1 = a\ \frac{m_2}{m_1+m_2} \tag{3-229}$$

軌道面での式 (3-228) の動径ベクトルの視線方向の成分は

$$z = r_1 \sin\ (\varphi+\omega)\ \sin\ i \tag{3-230}$$

となるので, 式 (3-230) を時間について微分すると

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{r_1} &= \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \\ &= a_1 \sin i (1-e^2) \left\{ \frac{e \sin\varphi \sin(\varphi+\omega) + (1+e\cos\varphi)\cos(\varphi+\omega)}{(1+e\cos\varphi)^2} \right\} \dot{\varphi}\end{aligned}$$

ここで, 式 (3-226) を使って

$$\tilde{V}_{r_1} = K_1\ (\cos\ (\varphi+\omega) + e\cos\omega) \tag{3-231}$$

$$K_1 = \frac{a_1 \sin\ i}{\sqrt{1-e^2}}\ \frac{2\pi}{P_\mathrm{b}} \tag{3-232}$$

を得る．式 (3-232) より $\tilde{V}_{r_1}$ の最大値 A_1, 最小値 B_1 はそれぞれ

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= K_1\ (1 + e\cos\omega) \\ B_1 &= -K_1\ (1 - e\cos\omega) \end{aligned}\right\} \tag{3-233}$$

これより, K_1 と $e\cos\omega$ が

$$K_1 = \frac{A_1 - B_1}{2} \tag{3-234}$$

$$e\cos\omega = \frac{A_1 + B_1}{A_1 - B_1} \tag{3-235}$$

のように観測値から決められる．次に, 速度最大値の点から速度がゼロになる点までの視線方向での距離を z_1, 速度最小値の点から速度がゼロになる点までの距離を z_2 とすると

$$e\sin\omega = \frac{2\sqrt{-A_1B_1}}{A_1 - B_1}\ \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} \tag{3-236}$$

となることを証明できる．式 (3-235) と (3-236) より, e と ω が決まる．求めた e と, 測定された周期 P_b を式 (3-232) に代入すると式 (3-234) で求められた K_1 から $a_1\ \sin i$ が決まる．一方, a_1 $\sin i$ を使うとケプラーの法則, 式 (3-80) より, 質量関数と呼ばれている量

$$f(m) = \frac{(m_2\sin i)^3}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{1}{G}\left(\frac{2\pi}{P_\mathrm{b}}\right)^2 (a_1\sin i)^3 \tag{3-237}$$

がわかる．この他にも近星点通過時 T というのが決定できるが, ここでは議論しないことにする．ハルスとテイラー [Hulse and Taylor 1974] が得た PSR1913+16 に対する速度曲線は実は図 3-8 であった．上に説明した Lehmann-Filhés 法によって決まった軌道パラメータを表 3-1 に示す．ここで T というのは近星点通過時である．

表 3-1　PSR1913+16 の軌道要素

K_1	=	199 ± 5km s^{-1}
P_b	=	27908 ± 7 s
e	=	0.615 ± 0.010
ω	=	179° ± 1°
T	=	JD 2,442,321.433 ± 0.002
a_1 sin i	=	1.00 ± 0.02 $R_\odot$
$f(m)$	=	0.13 ± 0.01 $M_\odot$

3-5-3　重力波の存在確認

3-5-1) で, 電波パルサーは中性子星であり, 質量は 1 $M_\odot$ ～ 2 $M_\odot$, 半径は 10 km 程度であることを示した．PSR1913+16 のパルサーの質量は $m_1 \sim 1M_\odot$ であるから, $f(m)$ の値から $\sin i$ が特別に小さくない限り, 伴星の質量 m_2 も 1 $M_\odot$ 程度である．第 1 章の所で述べたように太陽のような恒星は, ～ $R_\odot$ 程度の半径を持つ．ところが, $a_1\sin i = 1R_\odot$ であるから, もし伴星が太陽のような恒星なら, $\sin i$ が特別に小さくない限り, 伴星がパルサーと我々の間にやって来た時, 電波が隠されてパルサーが見えなくなることがあってもよい (これを食と呼んでいる．日食, 月

食の現象を思い出そう). しかし, そのような食が観測されないことから, 伴星は, もっと小さな天体, すなわち中性子星とか白色矮星ではないかという可能性が出てきた. もちろん, ブラックホールであってもよい.

2つの中性子星ないしは, 中性子星と白色矮星またはブラックホールが, $R_\odot$ ぐらいの距離で連星系をなしているのが PSR1913+16 であったのだ. パルサーが, 非常に精度のよい時計であることを思い出すと, これは, まさに 2-7 節で議論したポストニュートン項をチェックする実験場である. ハルスとテイラーによる連星パルサー PSR1913+16 の発見の直後に多くの人によっていくつかのことが指摘された [Will 1975, Wagoner 1975, Eardley 1975, Blandford and Teukolsky 1975]. まず, 公式 (2-269) で $\lambda_p = 1$ として近星点の進みは

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{2\pi}{P_\mathrm{b}}\right)^{\frac{2}{3}} 6\pi \left[\frac{G\,(m_1+m_2)}{c^3}\right]^{\frac{2}{3}} (1-e^2)^{-1}\, P_\mathrm{b}^{-1} \tag{3-238}$$

となる. P_b と e に観測値を入れると

$$\dot{\omega} = 2.10\mathrm{deg\ yr}^{-1} \left(\frac{m_1+m_2}{M_\odot}\right)^{\frac{2}{3}} \tag{3-239}$$

となる. これは, 水星に対する近日点移動 $42.95''$/世紀に較べて大変大きい. 表 3-1 の ω の測定精度を見ても, 1 年もすれば $\dot{\omega}$ は測定可能であることがわかる. そうすると, m_1 と m_2 の質量の和がわかる可能性が開けた.

次に, 重力による赤方偏移と横ドップラー効果が測れる可能性も同時に指摘された. いま, ニュートン極限のメトリックテンソルを考え, 点 $\mathbf{x}_1$ に静止した光源から発射した光を点 $\mathbf{x}_2$ に静止した観測者が受光したとする. 点 $\mathbf{x}_1$ と $\mathbf{x}_2$ の重力ポテンシャルを ϕ_1, ϕ_2 とし, ϕ_1, ϕ_2 は, $|\phi/c^2| \ll 1$ を満たすとする. 点 $\mathbf{x}_1$ で, 光の一波長が放射されるのに要した時間を $\mathrm{d}\tau_1$ とすると $\mathrm{d}\tau_1$ は, 座標時間 $\mathrm{d}t$ と

$$\mathrm{d}\tau_1^2 = \left(1+\frac{2\phi_1}{c^2}\right)\mathrm{d}t^2 \tag{3-240}$$

の関係にある. 式 (3-240) は, $|\phi_1/c^2| \ll 1$ だから

$$\mathrm{d}\tau_1 = \left(1+\frac{\phi_1}{c^2}\right)\mathrm{d}t \tag{3-241}$$

一方, 点 $\mathbf{x}_2$ で, 一波長を受光するのに要した時間 $\mathrm{d}\tau_2$ は

$$\mathrm{d}\tau_2 = \left(1+\frac{\phi_2}{c^2}\right)\mathrm{d}t \tag{3-242}$$

となる. ここで $\mathrm{d}t$ が同じであることに注意しよう. 静的なメトリックを考えているから, 2 点間を光が伝わるのに要する時間 t は一定だからである. 光の振動数 ω は $(\mathrm{d}\tau)^{-1}$ に比例するから,

$$\omega_2 = \left(1+\frac{\phi_1-\phi_2}{c^2}\right)\omega_1 \tag{3-243}$$

したがって

$$\Delta\omega = \frac{\phi_1-\phi_2}{c^2}\,\omega_1 \tag{3-244}$$

となる．点 $\mathbf{x}_1$ の方が点 $\mathbf{x}_2$ より，ポテンシャルが深いとすると，$\Delta\omega < 0$ となって振動数が下がる (波長は長くなる.) ので，重力による赤方偏移と呼ばれる．連星パルサーの場合は点 $\mathbf{x}_1$ を PSR1913+16 のパルサーにして，点 $\mathbf{x}_2$ を我々地上の観測者とする．ただ連星パルサーの場合，電波源は静止していない．PSR1913+16 はケプラー運動しているので，式 (2-233) ～ (2-235) より

$$\mathrm{d}\tau_1^2 = (1 + 2\phi_1/c^2)\ \mathrm{d}t^2 - \left(1 - 2\ \frac{\phi_1}{c^2}\right)\ \frac{(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2)}{c^2} \tag{3-245}$$

$|\phi_1/c^2| \sim (v_1^2/c^2)$ なので，$\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 = \mathbf{v}_1^2\ \mathrm{d}t^2$ に注意して，(v/c) のオーダーまでとると

$$\mathrm{d}\tau_1^2 = \left(1 + 2\ \frac{\phi_1}{c^2} - \frac{v_1^2}{c^2}\right)\ \mathrm{d}t^2 \tag{3-246}$$

よって

$$\mathrm{d}\tau_1 = \left(1 + \frac{\phi_1}{c^2} - \frac{v_1^2}{2c^2}\right)\ \mathrm{d}t \tag{3-247}$$

式 (3-244) を導いた時と同様にすると

$$\Delta\omega = \left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{c^2} - \frac{v_1^2}{2c^2}\right)\ \omega_1 \tag{3-248}$$

となる．括弧の中の第 1 項は，重力による赤方偏移であるが，第 2 項は，v_1^2 の大きさのみによっており，発光源が観測者に対して直角に運動してもゼロではないので，横ドップラー効果と呼ばれている．ϕ_2 は ϕ_1 に較べて絶対値は小さいので，ここでは簡単のため無視すると

$$\Delta\omega = \left(\frac{\phi_1}{c^2} - \frac{v_1^2}{2c^2}\right)\ \omega_1 \tag{3-249}$$

となるが，ケプラー運動しているから，ϕ_1 と $\mathbf{v}_1$ は独立ではない．

$$\begin{aligned} \phi_1 &= -\frac{Gm_2}{r} \\ \mathbf{v}_1^2 &= (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)\ \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 \end{aligned} \tag{3-250}$$

だから，$\dot{r}$ と $\dot{\varphi}$ に式 (3-225) と (3-226) を代入すると

$$v_1^2 = \frac{Gm_2^2}{m_1 + m_2}\ \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \tag{3-251}$$

式 (3-251) を (3-247) に代入して，式 (3-222) と (3-221) を使うと，τ_1 が積分できて

$$\begin{aligned} \tau_1 = t &- \frac{G\ (m_1 + 2m_2)\ m_2}{a\ (m_1 + m_2)\ c^2}\ \frac{P_\mathrm{b}}{2\pi}\ e \sin\ u \\ &+ \left(-\frac{G\ (m_1 + 2m_2)\ m_2}{a\ (m_1 + m_2)\ c^2}\ (t - t_0) + \frac{Gm_2^2}{2a\ (m_1 + m_2)\ c^2}\ t\right) \end{aligned} \tag{3-252}$$

となる．右辺第 2 項は，$e \neq 0$ の時のみ値を持つ．第 3 項は $e = 0$ の時でも値を持つ項で，これは t と τ_1 に定数倍のスケールを与えるだけであるので，τ_1 に含めることができる．連星の軌道と共に変化するのは，第 2 項のみである．第 2 項の $\sin\ u$ の前の係数を γ と書いて重力による赤方偏

移と横ドップラー効果と呼ぶ. γ の次元は時間であって PPN パラメータの γ や $\det(\gamma_{ij})$ とは違うものであることをここで注意しておく. すなわち γ は

$$\gamma = e \, \frac{(m_1 + 2m_2)}{a\,(m_1 + m_2)} \left(\frac{Gm_2}{c^2}\right) \frac{P_\mathrm{b}}{2\pi} \tag{3-253}$$

と定義されるが, $a = \left(\frac{P_\mathrm{b}}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \left(G\,(m_1 + m_2)\right)^{\frac{1}{3}}$ を使うと

$$\gamma = e \, \frac{(m_1 + 2m_2)\, m_2^{\frac{1}{3}}}{(m_1 + m_2)^{\frac{4}{3}}} \left(\frac{Gm_2}{c^3}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{P_\mathrm{b}}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{3-254}$$

となる.

2-6 節でシャピロ時間遅れ Δt_s を地球と火星について述べたが, 同じ効果は, 伴星による重力場によっても起こり [Blandford & Teukolsky 1976, Epstein 1977, 1979]

$$\Delta t_s = -2 \, \frac{Gm_2}{c^3} \, \ln \left(\frac{1 + e\cos\varphi}{1 - \sin i \sin(\omega + \varphi)}\right) \tag{3-255}$$

で与えられる. シャピロ時間遅れは, 2 つのパラメータ r, s

$$r = \frac{Gm_2}{c^3}$$

$$s = \sin\ i = (a_1\ \sin\ i)\, \frac{1}{m_2} \left(\frac{P_b}{2\pi}\right)^{-\frac{2}{3}} G^{-\frac{1}{3}}\, (m_1 + m_2)^{\frac{2}{3}} \tag{3-256}$$

で特徴づけられる. ここでも r は, 距離の r と違うことを注意しておく.

この時なされたもう 1 つの重要な指摘は, 重力波放出によって, 式 (3-143) より公転周期 P_b が減少することである. すなわち

$$\frac{\mathrm{d}P_\mathrm{b}}{\mathrm{d}t} = -\frac{192\pi}{5} \left(\frac{P_\mathrm{b}}{2\pi}\right)^{-\frac{5}{3}} \frac{1}{(1 - e^2)^{\frac{7}{2}}} \left(1 + \frac{73}{24}\, e^2 + \frac{37}{96}\, e^4\right) \cdot \frac{G^2 m_1 m_2}{c^5} \left(G\,(m_1 + m_2)\right)^{-\frac{1}{3}} \tag{3-257}$$

パルサーが非常によい時計で, かくも近接した連星系であるため, 上に論じてきた 5 つのポストケプラーパラメータが確かめられる可能性が出てきた. ただし, m_1 と m_2 は未知なので, 表 3-1 の情報だけから $\dot{\omega}$, γ, $\dot{P}_\mathrm{b}$, r, s を評価すると,

$$\dot{\omega} = 2.10 \text{ deg y}^{-1} \left(\frac{m_1 + m_2}{M_\odot}\right)^{\frac{2}{3}} \tag{3-258}$$

$$\gamma = 2.96 \text{ ms} \left(\frac{m_1 + 2m_2}{M_\odot}\right) \left(\frac{m_2}{M_\odot}\right) \left(\frac{m_1 + m_2}{M_\odot}\right)^{-\frac{4}{3}} \tag{3-259}$$

$$\dot{P}_\mathrm{b} = -54.6\mu\mathrm{sy}^{-1} \left(\frac{m_1}{M_\odot}\right) \left(\frac{m_2}{M_\odot}\right) \left(\frac{m_1 + m_2}{M_\odot}\right)^{-\frac{1}{3}} \tag{3-260}$$

$$r = 5\mu\mathrm{s} \left(\frac{m_2}{M_\odot}\right) \tag{3-261}$$

$$s = 0.51 \left(\frac{m_2}{M_\odot}\right)^{-1} \left(\frac{m_1 + 2m_2}{M_\odot}\right)^{\frac{2}{3}} \tag{3-262}$$

式 (3-258) ～ (3-262) の左辺は，次に述べるように観測から決めることができるので，式 (3-258) ～ (3-262) は未知の 2 つの量 m_1, m_2 についての 5 つの式になる．もし，これらが無矛盾なら重力波を含めた一般相対性理論の大きな検証になる．

さて，5 つのポストケプラーパラメータ ($\dot{\omega}$, γ, $\dot{P}_\mathrm{b}$, r, s) を決めるのには，ケプラーパラメータ K_1, P_b, e, ω, T, a, sin i を決めた時に使ったような方法では精度がでない．そこで，次のような方法を使う [Taylor and Weisberg 1982, 1989, Taylor 1992a]．まず，パルサーのパルスの位相 Φ は，パルサーでの固有時間 τ と次のような関係にある．

$$\Phi(\tau) = \nu\tau + \frac{1}{2}\,\dot{\nu}\tau^2 + \frac{1}{6}\,\ddot{\nu}\tau^3 \tag{3-263}$$

ここで ν はパルサーの自転振動数で，$\dot{\nu}$ と $\ddot{\nu}$ は，パルサーのエネルギー放出によるパルス周期の変化する項で，Taylor and Weisberg [1989] では，$\dot{\nu} = -2.47559(2)\times 10^{-15}\ \mathrm{s}^{-2}$, $|\ddot{\nu}| < 6\times 10^{-27}\ \mathrm{s}^{-3}$ であって，$\ddot{\nu}$ の影響はほとんど無視できる．さて，τ と地球上でパルスが到着する時間 t_obs の関係は，

$$\begin{aligned}\tau = t_\mathrm{obs} - \frac{d}{c} - D/f^2 + \Delta_{\mathrm{R}_\odot}\ (\alpha,\ \delta,\ \mu_\alpha,\ \mu_\delta,\ \pi)\\ + \Delta_{E_\odot} - \Delta_{s_\odot}\ (\alpha,\ \delta) - \Delta_R\ (a_1\ \sin\ i,\ e,\ P_b,\ T_0,\ \omega,\ \dot{\omega},\ \dot{P}_\mathrm{b})\\ - \Delta_E(\gamma) - \Delta_s\ (r,\ s)\end{aligned} \tag{3-264}$$

となる．$\Delta_{R\odot}$ はレーマー効果と呼ばれている項であるが，太陽系の重心と連星パルサーの重心の距離を d, 太陽系からパルサーに向かう単位方向ベクトルを $\mathbf{n}$, 太陽から地球への方向ベクトルを $\mathbf{r}$ としたとき，

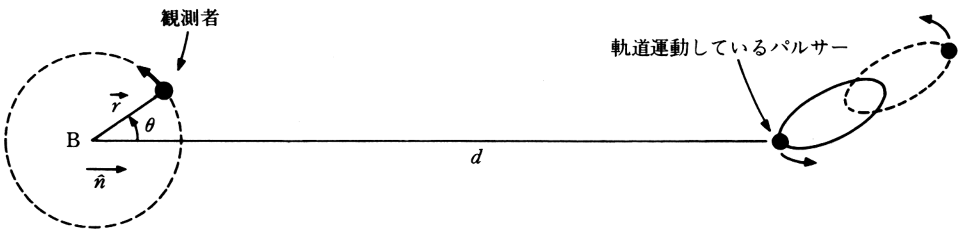


図 3-10　太陽，地球とパルサーの関係

図 3-10 より

$$\begin{aligned}\Delta_{R_\odot} &= \frac{d - |d\,\mathbf{n} - \mathbf{r}|}{c}\\ &\simeq \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{c} + \frac{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})^2 - r^2}{2cd}\end{aligned} \tag{3-265}$$

と与えられる．α, δ はパルサーの赤経，赤緯であり，μ_α, μ_δ は視線方向に垂直な面でパルサーが角度で動く速さ (固有運動)，π は視差 (パルサーまでの距離) である．f は，観測している電波の振動数で，D は，星間空間の電子のため電波の伝播速度が振動数によって異なる効果をあらわ

しており, Dispersion Measure(DM) と呼ばれているものである. D の定義は [赤羽, 海部, 田原 1988]

$$D = \frac{e^2}{2\pi m_e c} DM, \qquad DM = \int_0^d n_e \, dl \tag{3-266}$$

で, n_e は星間空間の電子密度である. PSR1913+16 の場合, $DM = 165$ pc cm^{-3} であって [Hulse and Taylor 1975], $n_e = 0.025$ cm^{-3} とすると PSR1913+16 までの距離は 6.6 kpc になる. Δ_E は重力による赤方偏移と横ドップラー効果で $\Delta_{E\odot}$ は太陽系内での同じ効果であり, $\Delta_E(\gamma)$ はパルサーでの式 (3-253) である. Δ_s はシャピロ時間遅れである. $\Delta_{s\odot}$ は太陽系内のシャピロ時間遅れで, Δ_S (r, s) は式 (3-255) で与えられるものである. さて, 未知のポストケプラーパラメータ $\dot{\omega}, \gamma, \dot{P}_b, r, s$ を決めるには, ケプラーパラメータ a_1 sin $i, e, \dot{P}_b, T_0, \omega$ とパルサーの位置についてのパラメータ $\alpha, \delta, \mu_\alpha, \mu_\delta, \pi$, パルサーのパラメータ $\nu, \dot{\nu}$ と $\ddot{\nu}$ をも未知数と考えて, 最小二乗法で決定する. いま N 個のパルスを PSR1913+16 から受信したとする. 上の 18 個のパラメータの値を仮定すると i 番目のパルスを受信した $t_{\rm obs}$ から式 (3-264) を通して τ_i, したがって式 (3-263) より $\Phi(\tau_i)$ が決まる. この位相は, 互いに整数だけずれているべきであるから

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\Phi(\tau_i) - n_i}{\sigma_i} \right)^2 \tag{3-267}$$

が最小になるようにパラメータを決める. ここで, σ_i は i 番目のパルスの位相決定精度であり, n_i は $\Phi(\tau_i)$ に最も近い整数である. このようにして決定されたパラメータの値はパラメータの種類によっても違うが, Taylor and Weisberg [1989] では位置とパルサーの $\nu, \dot{\nu}, \ddot{\nu}$ については表 3-2 のようになっている. ケプラーパラメータとポストケプラーパラメータは, Taylor [1993] に

表 3-2　PSR1913+16 の位置パラメータ

α	$19^h 15^m 28^s.00018(15)$
δ	$16°06'27''.4043(3)$
μ_α (10^{-3} arcsec yr^{-1})	-3.2 ± 1.8
μ_δ (10^{-3} arcsec yr^{-1})	1.2 ± 2.0
ν (s^{-1})	16.940539303295(2)
$\dot{\nu}$ (10^{-15} s^{-2})	$-2.47583(2)$
$\ddot{\nu}$ (10^{-27} s^{-3})	< 6

よると表 3-3 のようになる.

表 3-3　PSR1913+16 のケプラーパラメータとポストケプラーパラメータ

e	=	0.6171308(6)
$\dot{\omega}$	=	4.226621(6) deg yr^{-1}
γ	=	4.295(2) ms
P_b	=	27906.9807804(6) s
$\dot{P}_b$	=	$-2.425(2)10^{-12}$ s s^{-1}

r と s については, 表 3-3 の諸量ほど精度よくはまだ決まっていない. 原因は (3-255) の式の対数依存にあると思われるが, $s = \sin i = 0.71^{+0.06}_{-0.10}$ という値が Taylor and Weisberg [1989] に

出ている．また, r と s の決定精度についても同じく Taylor and Weisberg [1989] で詳しく論じられている．

(3-238) に $\dot{\omega}$, $P_{\rm b}$, e の観測値を入れると (m_1+m_2) が決まる．また, (3-254) にも γ, e, $P_{\rm b}$ の観測値を入れると $m_2\ (m_1+2m_2)\ (m_1+m_2)^{-\frac{4}{3}}$ が決まる．これから m_1 と m_2 について解くと

$$\begin{aligned} m_1 &= 1.4411(7)\ M_\odot \\ m_2 &= 1.3874(7)\ M_\odot \end{aligned} \tag{3-268}$$

となる．またグラフで示すと図 3-11 のようになる．

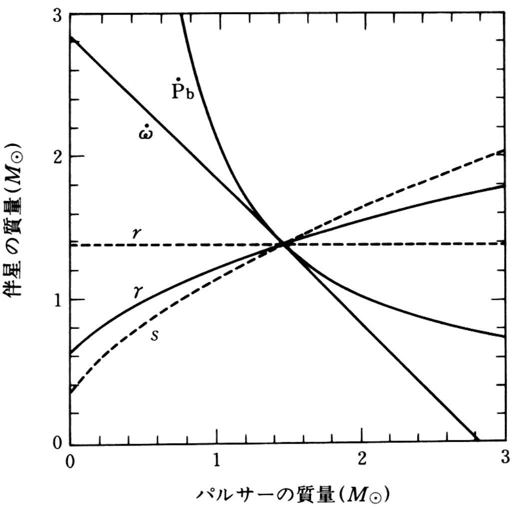


図 3-11　パルサーと伴星の質量．$\dot{\omega}, \gamma$ と $\dot{P}_{\rm b}$ が観測値になる曲線．r と s はシャピロ時間遅れの 2 つのパラメータの予想値．[Taylor 1993]

m_1 はパルサーであり, 中性子星だから, これは 4 桁の精度で初めて中性子星の重力質量を決めたことになる．3-5-1 項で述べたように, 中性子星には最大質量が存在するが, その最大質量が 1.441 $M_\odot$ 以下を与える状態方程式は, PSR1913+16 の存在と矛盾するので, 正しくないとして否定される．これでわかった m_1 と m_2, さらに e と $P_{\rm b}$ の値を式 (3-257) に代入すると, $\dot{P}_{\rm b}$ の一般相対論の予想値 $\dot{P}_{\rm b}^{\rm GR}$ が

$$\dot{P}_{\rm b}^{\rm GR} = -2.40258 \pm 0.00004 \times 10^{-12}\ ss^{-1} \tag{3-269}$$

となる．これと表 3-3 の観測値は, 1%レベルであっている．しかし, さらにパルサーと地球が銀河系内で加速度運動していることによる効果を補正すると [Damour and Taylor 1991], 理論値は $\dot{P}_{\rm b}^{\rm GR} = -2.41958 \pm 0.005$ と補正される．これより

$$\frac{(\dot{P}_{\rm b}^{obs} - \dot{P}_{\rm b}^{\rm GR})}{\dot{P}_{\rm b}^{\rm GR}} = 0.002 \pm 0.005 \tag{3-270}$$

が得られる．これは, 1%以下のレベルで, 理論と観測が合っていることを示している．重力波の存在が確認されたと言って間違いないだろう．それと同時に, 重力波という動的な現象に対して

もアインシュタインによる一般相対性理論が確かめられたのである．なお, r と s についてもその精度よい決定のための観測は続けられている．PSR1913+16 に似た系 PSR1534+12 [Wolsczan 1991] が発見された．このパルサーは PSR1913+16 の 10 分の 1 程度の距離なので, (DM =11 pc cm^{-3} で $n_{\mathrm{e}} = 0.025$ とすると距離 440 pc), 電波強度が強くてさらに精度のよい $\dot{\omega}$, γ, $\dot{P}_{\mathrm{b}}$, r, s の決定が近い将来なされると期待されている．

さて, 伴星については, 実はヘリウム星 (半径 $\sim 0.2R_{\odot}$), 白色矮星 (半径 $10^{-3} \sim 10^{-2}R_{\odot}$), 中性子星そしてブラックホールの可能性があったが, ヘリウム星だとすると, パルサーによる潮汐力のため, ヘリウム星が四重極を持つようになる．この四重極の作る重力のためパルサーの近星点が移動する効果が無視できない．そうすると $\dot{\omega}$ から決めた $m_1 + m_2$ の和が小さくなってしまう [Smarr and Blandbord 1976] のでヘリウム星ではない．白色矮星とすると, 白色矮星の典型的質量は観測的には $\sim 0.6M_{\odot}$ であり, 1.3874 $M_{\odot}$ というのは, チャンドラセカール臨界質量 (4-1-1 項で説明する) に近くて重すぎる．したがって現在では, 連星中性子星の形成シナリオ (4-4 節参照) とも関係して伴星は中性子星と考えられている．もちろんブラックホールの可能性は残っている．

以上, 重力波は理論的に存在が予言され, 連星パルサーの観測によってその存在が確認された．この業績に対してノーベル賞委員会は, ハルスとテイラーに 1993 年度ノーベル物理学賞を与えた．次章では, 各種重力波源について議論をしよう．

3-6　重力波の多重極展開

本章では, 四重極の重力波を主に論じた．これは, 式 (3-26) と (3-27) の遅延展開の最初の項であった．また, 式 (3-58) で見たように, 四重極の重力波は, $f_{ij}^{lm}(\theta, \varphi)$ で表現できて, これの丁度 $l = 2$ に対応していることがわかった．実は, 四重極波は, 今から述べる重力波の多重極展開の一例なのである．

まず, 平坦な 3 次元空間を考えてその中で任意のスカラー関数 f を考えよう．f は通常球面調和関数 Y_{lm} を用いて

$$f = \sum_{l,m} f_{lm}(r)\, Y_{lm}(\theta, \varphi) \tag{3-271}$$

と展開できる．では, 任意のベクトル A_i があった時, 上の展開にあたるものはどうすればよいのだろうか．A_i は 3 つの成分 A_1, A_2, A_3 を持つから, 各 A_i を式 (3-271) と同様に展開することはできる．すなわち

$$A_i = \sum_{l,m} A_{ilm}\,(r)\, Y_{lm}\,(\theta, \varphi) \tag{3-272}$$

しかし, 空間回転に対するベクトルの変換性を考慮した別の考え方ができる．それが, ベクトル調和関数という考え方である．$Y_{lm}\,(\theta, \varphi)$ から 3 つのベクトルを作ることができる．それは,

$$\begin{aligned} a_i &\equiv x_i\, Y_{lm} \\ b_i &\equiv \frac{\partial Y_{lm}}{\partial x_i} \end{aligned} \tag{3-273}$$

$$c_i \equiv \epsilon_{ijk}\ x^j\ \frac{\partial Y_{lm}}{\partial x^k}$$

である．特に，最後の項は，

$$L_i \equiv \epsilon_{ijk}\ x^j\ \frac{\partial}{\partial x^k} \tag{3-274}$$

を定義すると，量子力学での角運動量演算子に比例している．a_i, b_i, c_i は，極座標 $(r,\ \theta,\ \varphi)$ で表現した方がわかりやすい．ベクトルの変換公式

$$A'_i = A_l\ \frac{\partial x^l}{\partial x^{i'}} \tag{3-275}$$

を使って

$$a'_i = \overset{\qquad r \qquad\quad \theta \quad\ \ \varphi}{\left(r\ Y_{lm},\quad 0,\quad 0\right)} \tag{3-276}$$

$$b'_i = \overset{\quad r \qquad\qquad \theta \qquad\qquad\qquad \varphi}{\left(0,\quad \frac{1}{r}\ \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta}\ ,\quad \frac{1}{r\sin\theta}\ \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \varphi}\ \right)} \tag{3-277}$$

$$c'_i = \overset{\quad r \qquad\qquad\qquad \theta \qquad\qquad\qquad \varphi}{\left(0,\quad -\frac{1}{r\sin\theta}\ \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \varphi}\quad \frac{\sin\theta}{r}\ \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta}\right)} \tag{3-278}$$

となることがわかる．Y_{lm} は，

$$\int Y_{lm}^*\ Y_{l'm'}\ \mathrm{d}\ \Omega = \delta_{ll'}\ \delta_{mm'} \tag{3-279}$$

で規格化されているが，a_i, b_i と c_i も規格化した方が都合がよい．いま，バックグラウンドは平坦な 3 次元空間なので，

$$\gamma_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j = \mathrm{d}r^2 + r^2\ (\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2) \tag{3-280}$$

となるが，任意のベクトル d_i, e_i に対して，式 (3-279) に対応する積分を

$$(d,\ e) = \int d_l^* e_m \gamma^{lm}\mathrm{d}\Omega \tag{3-281}$$

で定義して規格化する．そうすると a_i, b_i, c_i は，互いに直交し，規格化した a_i, b_i, c_i を **a**, **b**, **c** で表すと

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= (Y_{lm},\ 0,\ 0) \\
\mathbf{b} &= r\ \left(\frac{1}{2l\ (l+1)}\right)^{\frac{1}{2}}\ \left(0,\ \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta}\ ,\ \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \varphi}\right) \\
\mathbf{c} &= r\ \left(\frac{1}{2l\ (l+1)}\right)^{\frac{1}{2}}\ \left(0,\ \frac{1}{\sin\theta}\ \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \varphi}\ ,-\sin\theta\ \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta}\right)
\end{aligned} \tag{3-282}$$

と書ける．式 (3-282) を用いると，任意のベクトル $\mathbf{V}$ は

$$\mathbf{V} = \sum_{l,m} \{A_{lm}(r)\mathbf{a}(\theta,\varphi) + B_{lm}(r)\mathbf{b}(\theta,\ \varphi) + C_{lm}(r)\mathbf{c}(\theta,\varphi)\} \tag{3-283}$$

という形で (3-271) のスカラー関数に対応したベクトル調和関数展開ができる．ここで，$\mathbf{b}$ と $\mathbf{c}$ は，パリティ変換 $(\mathbf{x} \to -\mathbf{x})$ に対して異なる固有値 $(-1)^{l+1}$ と $(-1)^l$ を持つことに注意しておく．

次にテンソルを考えよう．今度は (3-273) に対応して，次の量を考えることができる．

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} Y_{lm}\ , \qquad L_i \frac{\partial}{\partial x^j} Y_{lm}\ , \qquad L_i\, L_j\, Y_{lm}\ ,$$
$$x_i \frac{\partial}{\partial x^j} Y_{lm}\ , \qquad x_i\, L_j\, Y_{lm}\ , \qquad x_i\, x_j\, Y_{lm} \tag{3-284}$$

対称なテンソルしか考えない時には，式 (3-284) で i, j について対称な成分だけを考えればよい．あとは，ベクトル調和関数の時と同様の作業を行って互いに直交する 6 つのテンソル調和関数が得られる．それらは，

$$a_{lm} = \begin{array}{c|ccc} & r & \theta & \varphi \\ \hline r & Y_{lm} & 0 & 0 \\ \theta & 0 & 0 & 0 \\ \varphi & 0 & 0 & 0 \end{array} \tag{3-285}$$

$$b_{lm} = \frac{r}{\sqrt{2l(l+1)}}\begin{pmatrix} 0 & \partial_\theta Y_{lm} & \partial\varphi Y_{lm} \\ * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3-286}$$

$$c_{lm} = \frac{r}{\sqrt{2l(l+1)}}\begin{pmatrix} 0 & (\sin\theta)^{-1}\ \partial\varphi Y_{lm} & -\sin\theta\partial_\theta Y_{lm} \\ * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3-287}$$

$$g_{lm} = \frac{r^2}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{lm} & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2\theta Y_{lm} \end{pmatrix} \tag{3-288}$$

$$d_{lm} = \frac{r^2}{\sqrt{4nl\ (l+1)}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -X_{lm}/\sin\theta & \sin\theta W_{lm} \\ 0 & * & \sin\theta X_{lm} \end{pmatrix} \tag{3-289}$$

$$f_{lm} = \frac{r^2}{\sqrt{4nl\ (l+1)}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_{lm} & X_{lm} \\ 0 & * & -\sin^2\theta W_{lm} \end{pmatrix} \tag{3-290}$$

ここで,

$$n = \frac{l\,(l+2)}{2} - 1$$
(3-291)

$$X_{lm} = 2\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\,\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\right)\,Y_{lm} \tag{3-292}$$

$$W_{lm} = \left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\,Y_{lm} \tag{3-293}$$

また, $*$はテンソルの対称性から明らかな項なので, 省略した. f_{lm} は, 規格化因子が違うだけで四重極波の所で出てきた式 (3-58) の f_{lm} と同じであることに注意しよう. 上の 6 つのテンソル調和関数の任意の 2 つを T, S とすると, T, S は次に定義される内積に関して直交している.

$$(T,\ S) = \int \gamma^{ip}\,\gamma^{jq}\,T^*_{ij}\,S_{pq}\,\mathrm{d}\,\Omega \tag{3-294}$$

式 (3 − 285) ∼ (3 − 290) のテンソル調和関数は, $(T,\ T) = 1$ で規格化されている. (3-64) で明らかにしたように, 四重極波は

$$h^{\mathrm{TT}}_{ij} = \sum_m A_{2m}\,(f_{2m})_{ij} \tag{3-295}$$

と書ける. さて, 式 (3-285) から (3-290) を見ると, d_{lm} もトランスバースでトレースレスである. どうしてかと言うと, $\theta\theta$, $\varphi\varphi$, $\theta\varphi$ 成分しか持っていないので, 動径方向に垂直な成分しかない. また

$$\gamma^{ij}\,(d_{lm})_{ij} = 0 \tag{3-296}$$

だから, トレースレスである. 他の a_{lm}, b_{lm}, c_{lm}, g_{lm}, は TT ではない. さらに, パリティ変換 $(\mathbf{x} \to -\mathbf{x})$ に対して d_{lm} と f_{lm} は $(-1)^{l+1}$ と $(-1)^l$ というように異なった変換をする. つまり, 四重極以上の重力波の多重極を考えると f_{lm} 以外にも d_{lm} も考える必要がある. 任意の重力波は, TT ゲージで, d_{lm} と f_{lm} を使って,

$$h^{\mathrm{TT}}_{ij} = \sum_{l=2}^{\infty}\ \sum_{m=-l}^{l}\ \frac{1}{r}\,(\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}t^l} I^{lm}\,(t-r) f^{lm}_{ij} + \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}t^l} S^{lm}\,(t-r) d^{lm}_{ij}) \tag{3-297}$$

と書ける. パリティの違いから f^{lm}, d^{lm} を電気的多重極と磁気的多重極と呼ぶこともある. 遅延展開 (式 (3-26)) で最初に出てきたのが四重極波であったわけである. スローモーションの源に対しては

$$I^{lm} = \frac{16\pi}{(2l+1)!!}\,\left(\frac{(l+1)(l+2)}{2(l-1)\,l}\right)^{\frac{1}{2}} \int \tau_{00}\,Y^{lm*} r^l\,\mathrm{d}^3\,x, \tag{3-298}$$

$$S^{lm} = -\frac{32\pi}{(2l+1)!!}\left(\frac{(l+2)(2l+1)}{2(l-1)(l+1)}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\int \epsilon_{jpq}\, x_p\, (-\tau_{0q})\, Y_j^{l-1,lm*} r^{l-1}\, \mathrm{d}^3\, x \qquad (3\text{-}299)$$

が得られる. ここで, $n!! = n \cdot (n-2) \cdots 1$ であり, $Y_j^{l-1,lm*}$ は pure orbital 調和関数と呼ばれている量で

$$\boldsymbol{\xi}^0 \equiv \mathbf{e}_z, \boldsymbol{\xi}^{\pm} \equiv \mp(\mathbf{e}_x \pm \mathrm{i}\mathbf{e}_y)/\sqrt{2}$$

とした時

$$\mathbf{Y}^{l',lm}(\theta,\varphi) = \sum_{m'=-l'}^{l'} \sum_{m''=-1}^{1} (1l'm''m'|lm)\boldsymbol{\xi}^{m''} Y^{l'm'}$$

で定義される. 式 (3-297) と (3-298) を見ると I^{lm} は質量分布の多重極であり, S^{lm} は, 角運動量分布の多重極になっている (パリティの違いは, ここから来ている).

重力波のエネルギー放出率は, 式 (3-86) の一般式に, 式 (3-296) を代入して, 式 (3-89) と同様の積分を実行すればよい. 結果は,

$$L_{\mathrm{GW}} = \frac{1}{32\pi} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=l}^{l} \left\langle \left| \frac{\mathrm{d}^{l+1} I^{lm}}{\mathrm{d}t^{l+1}} \right|^2 + \left| \frac{\mathrm{d}^{l+1}}{\mathrm{d}t^{l+1}}\, S^{lm} \right|^2 \right\rangle \qquad (3\text{-}300)$$

である. 式 (3-298) と (3-299) は, 式の展開途中にでてくる $j_l(wr)$ の展開の最初の項だけをとったものに対応していて, 一般の場合は, [Thorne 1980] にさらに詳しい議論がある.

第4章・重力波の源

前章の最後の節で, 連星パルサー PSR1913+16 の電波観測によって, 重力波の存在が確認されたことがわかった. しかも, 一般相対性理論からのずれは 1%を切っている. これをもとにして, このずれが仮に重力定数が時間変化しているとしたら, その上限が, $\dot{G}/G = (1.10 \pm 1.07) \times 10^{-11}\mathrm{y}^{-1}$ と与えられるという主張もなされている [Damour, Gibbons and Taylor 1988, Damour and Taylor 1991]. これは, Viking Data による値 $\dot{G}/G = (0.2 \pm 0.4) \times 10^{-11}\mathrm{y}^{-1}$ [Helling et al. 1983] と較べられるものである. さらに, PSR1913+16 より距離の近い連星パルサー PSR1534+12 [Wolszczan 1991] を使うと $(\dot{\omega}, \gamma, \dot{P}_\mathrm{b}, r, s)$ 以外にも他の 14 個のポストケプラーパラメータが決定される可能性が議論されており [Damour and Taylor 1992], 重力理論のさらなる検証として今後の発展が期待されている.

さて, PSR1913+16 は振動数 $\nu_0 = 7.16674281991 \times 10^{-5}$Hz の重力波を放出している. 実は $e = 0.617$ だから高調波の寄与も大きいが, ここでは基本波のみを考える [Peters and Mathews 1963]. PSR1913+16 による重力波の地球上での振幅は, PSR1913+16 までの距離を 7 kpc として式 (3-84) と (3-85) で $\theta = 0, \Phi = 0, \varphi = 0$ とする[1) と,

$$\begin{aligned} h_+ &\simeq -7.2 \times 10^{-23} \ \cos\ [2\pi\nu_0\ (t-r)\ ] \\ h_\times &\simeq -7.2 \times 10^{-23} \ \sin\ [2\pi\nu_0\ (t-r)\ ] \end{aligned} \tag{4-1}$$

である. 1993 年度にハルスとテイラーに与えられたノーベル賞は, 式 (4-1) の重力波を直接検出したわけではなく, 式 (4-1) の重力波放出による連星の軌道周期の変化を見たのであった. 第5章以降で議論されるのは, 式 (4-1) のように地球上にやってくる重力波を直接検出する実験方法の詳細であるので, 本章では重力波の源について議論する. ここで注意しておくことは, まず, 重力波の直接観測はまだなされていないので, 式 (4-1) のような連星はともかく, 多くの重力波源は, 可能性として指摘されているのであって, 確実に存在するとは言えない場合もあることである. しかし, 重力波は今や理論的にも観測的にも存在することは間違いないのだから, 重力波源についていろいろな可能性を指摘しておくことは, 十分意味があるだろう.

---

1) 本当は $e \neq 0$ の効果を考える必要があるが, ここではオーダーのみの議論をしたいので, $e = 0$ とする

4-1　中性子星の形成と重力波

まず, 中性子星の形成を議論する前にチャンドラセカールの臨界質量を説明する.

4-1-1　チャンドラセカールの臨界質量

式 (3-167) と (3-168) のニュートン力学での球対称な星の平衡解を考えよう. いま, 圧力 p と ρ が N, K を定数として

$$p = K\rho^{1+\frac{1}{N}} \tag{4-2}$$

の関係 (ポリトロープ) にあるとする. N はポリトロープ指数と呼ばれる. 式 (3-168) は

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}r^2\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r} = 4\pi G\rho \tag{4-3}$$

と書き換えられるが, 式 (3-167) を代入すると

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}r^2\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = -4\pi G\rho \tag{4-4}$$

となる. ここで,

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_c\theta^N \\ r &= \alpha\xi \\ \alpha &\equiv \left\{\frac{(N+1)\ K}{4\pi G}\ \rho_c^{\frac{1}{N}-1}\right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{4-5}$$

という変数変換をすると, 式 (4-4) はレーン-エムデン方程式と呼ばれている式

$$\frac{1}{\xi^2}\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\ \xi^2\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\ \theta = -\theta^N \tag{4-6}$$

になる. 式 (4-6) は, $\xi = 0$ (すなわち $r = 0$ だから中心を意味する) で $\theta = 1$, $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}\xi = 0$ (すなわち $\rho = \rho_c$, $\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}r = 0$) という初期条件の下で解くと $N < 5$ なら [Chandrasekhar 1939], ある $\xi = \xi_1$ (例えば $N = 1$ なら $\theta = \sin\xi/\xi$ なので, $\xi_1 = \pi$ である) で, $\theta = 0$ ($\rho = 0$) となる. したがって, 星の半径 R と質量 M は

$$R = \alpha\xi_1 = \left\{\frac{(N+1)\ K}{4\pi G}\right\}^{\frac{1}{2}}\ \rho_c^{\frac{1-N}{2N}}\xi_1 \tag{4-7}$$

$$M = \int_0^R 4\pi r^2\rho\mathrm{d}r = 4\pi\left\{\frac{(N+1)\ K}{4\pi G}\right\}^{\frac{3}{2}}\ \rho_\mathrm{c}^{\frac{3-N}{2N}}\left(-\xi^2\ \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi}\right)\Big|_{\xi=\xi_1} \tag{4-8}$$

で与えられる. 式 (4-8) から面白いことがわかる. $N < 3$ では M は中心密度の増加関数であるが, $N = 3$ では ρ_c によらなくなり, $N > 3$ では ρ_c の減少関数となる.

さて, チャンドラセカールの臨界質量というのは, 電子の縮退圧で支えられた星の上限質量であるが, 上のポリトロープの議論を用いると次のようにして出すことができる. 縮退圧が重要な時には, 温度は重要ではないから $T = 0$ とする. すると, 電子はフェルミ運動量 p_F までのエネルギー準位をびっしりと占める. 電子数を n_e とするとプランク定数を h として

$$n_\mathrm{e} = \frac{8\pi}{h^3}\ \int^{p_\mathrm{F}} p^2\mathrm{d}p = \frac{8\pi}{h^3}\ \frac{p_\mathrm{F}^3}{3} \tag{4-9}$$

一方, 圧力 p は [ランダウ／リフシッツ 1964c]

$$p = \frac{8\pi}{3h^3} \int_0^{p_{\rm F}} \frac{cp^4}{\sqrt{p^2 + m_{\rm e}^2 c^2}}\, {\rm d}p \tag{4-10}$$

で与えられる. 式 (4-10) は, 非相対論的領域 ($p_{\rm F} \ll m_{\rm e}c$) では, 電子 1 個当たりの質量数を $\mu_{\rm e}$ とすると $m_{\rm p}$ を陽子の質量として $n_{\rm e} = \rho/(\mu_{\rm e} m_{\rm p})$ だから

$$p = \frac{8\pi}{3h^3 m_{\rm e}} \frac{p_{\rm F}^5}{5} \propto \left(\frac{\rho}{\mu_{\rm e}}\right)^{\frac{5}{3}} \tag{4-11}$$

となって, $N = 1.5$ のポリトロープになる. そうすると (4-8) より M は $\rho_c^{\frac{1}{2}}$ に比例して増加する. しかし, $p_{\rm F} \gg m_{\rm e}c$ では

$$p = \frac{2\pi}{3h^3}\, c \left(\frac{3h^3\ \rho}{8\pi m_p \mu_{\rm e}}\right)^{\frac{4}{3}} \propto \left(\frac{\rho}{\mu_{\rm e}}\right)^{\frac{4}{3}} \tag{4-12}$$

となる. 式 (4-12) は $N = 3$ のポリトロープだから, 式 (4-8) より質量は一定になる. つまり, 電子の縮退圧で支えられている星は密度が小さい時は $\rho_c^{\frac{1}{2}}$ で質量が増加するが, $\rho_{\rm c} \to \infty$ で質量は一定になり, 質量に上限があることになる. この上限質量をチャンドラセカールによる臨界質量 (M_{ch}) と呼んでいる. チャンドラセカールはこの業績により 1985 年ノーベル物理学賞を受賞した. $M_{\rm ch}$ は式 (4-12) より決まる K を式 (4-8) に代入することによって

$$M_{\rm ch} = \left(\frac{2}{\mu_{\rm e}}\right)^2 1.46 M_\odot \tag{4-13}$$

となる. $\mu_{\rm e}$ がいくらになるかであるが, 原子番号の大きい重元素では電子 1 個当たり陽子 1 個とおおよそ中性子 1 個あるから $\mu_{\rm e} \sim 2$ である. したがって, $M_{\rm ch} \sim 1.4\ M_\odot$ が, 電子の縮退圧で支えられる星の限界になる. 中性子星は, 中性子の縮退圧で支えられる星と第ゼロ近似で考えればよいので, $\mu_{\rm e}$ のかわりに $\mu_n = 1$ を用いると $M_{\rm ch} = 5.84 M_\odot$ となるが, すでに 3-5-1 項で調べたように一般相対性理論の効果が無視できないので, 実際の臨界質量は核力の効果をいれても 3 $M_\odot$ 以下になった. 白色矮星と中性子星 (自由中性子の場合) の両方の中心密度と質量の関係を示すと, 図 4-1 のようになる.

4-1-2 中性子星の形成

1-1 節の宇宙の諸階層の所でも述べたように, 質量が 13 $M_\odot$ 以上の星は, 燃料の枯渇 → 中心核の重力収縮 → 中心温度の上昇 → 新しい燃料に着火 → 次の燃料の枯渇, というようなサイクルが進んで、最後には, 鉄の中心核ができるところまで進化が進む. 鉄は 1 核子当たりの結合エネルギーが最大であるため, もはや, 温度が上昇しても発熱反応はないので, 次の核燃焼ステージはない. そして, 鉄の中心核の質量が $M_{\rm ch} \sim 1.4\ M_\odot$ を超えると重力収縮が始まる [Shapiro and Teukolsky 1983 §18, Kippenhahn and Weigert 1990 §34.3] 重力収縮の結果温度が上昇すると, 鉄の光分解

$$\gamma + {\rm Fe}^{56} \rightleftarrows 13{\rm He}^4 + 4n \tag{4-14}$$

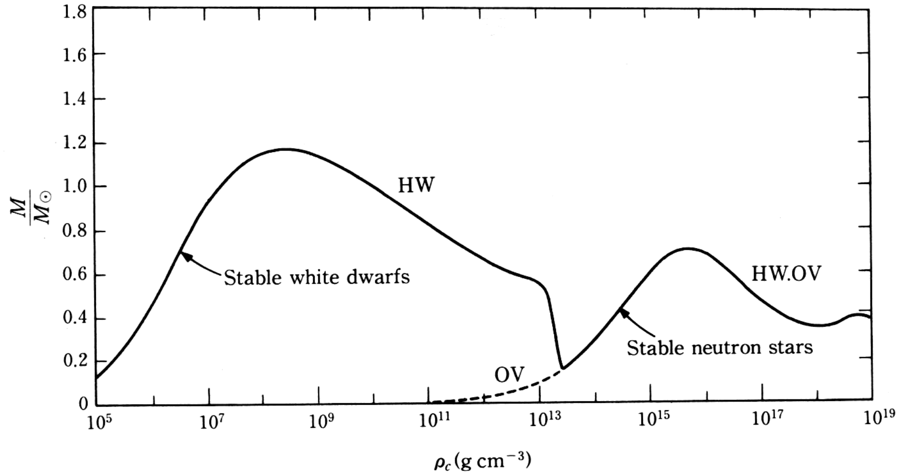


図 4-1　白色矮星と中性子星 (自由中性子) の中心密度と質量の関係 [Shapiro and Tenkolsky 1983].

が始まるが, これは 2 MeV/核子の吸熱反応であるので, 重力収縮の結果解放されたエネルギーの一部は鉄の分解に使われてさらに重力収縮が進む. また, 電子のフェルミエネルギー E_{F} は

$$E_{\mathrm{F}} = m_{\mathrm{e}}c^2 \left(\frac{\rho}{4 \times 10^6 \mathrm{g\,cm^{-3}}}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{4-15}$$

なので, $\rho \gg 10^6 \mathrm{g\,cm^{-3}}$ では

$$\left.\begin{aligned} &e^- + (Z,\ A) \to \nu_{\mathrm{e}} + (Z-1,\ A) \\ &e^- + p \to \nu_{\mathrm{e}} + n \end{aligned}\right\} \tag{4-16}$$

といった電子捕獲によって物質の中性子化が進むとともに, ν_{e} の放射による冷却で, 重力収縮がさらに加速される. 式 (4-16) 以外にもニュートリノは, 種々の過程で発生 [Dicus 1972, Dicus, Kolb, Schramm and Tubbes 1976] する.

$$\left.\begin{aligned} &e^+ + e^- \to \nu + \bar{\nu} \\ &e^- + \gamma \to e^- + \nu + \bar{\nu} \\ &e^- + (Z,\ A) \to e^+ + \nu + \bar{\nu} + (Z,\ A) \end{aligned}\right\} \tag{4-17}$$

上のプロセスもすべて冷却に効くのでさらに重力収縮は進む. また, ニュートリノは種々の過程で散乱する [Tubbes and Schramm 1975]

$$\left.\begin{aligned} &\nu + n \to \nu + n \\ &\nu + p \to \nu + p \\ &\nu + (Z,\ A) \to \nu + (Z,\ A) \end{aligned}\right\} \tag{4-18}$$

$\rho > 3 \times 10^{11} \mathrm{g/cm^3}$ になると, これらの散乱過程のため重力崩壊するコアで, ニュートリノは真っ直ぐには外に出られなくなる [Sato 1975]. すなわち, ニュートリノに対しても星は不透明になるので, ニュートリノの輸送方程式も解く必要が出てくる.

上のようなプロセスを考慮に入れた重力崩壊の球対称シミュレーションが数多く行われた [レビューとして Mayle 1990]. 図 4-2 には, Wilson [1985] の計算例を示す. 中心核の重力崩壊が始

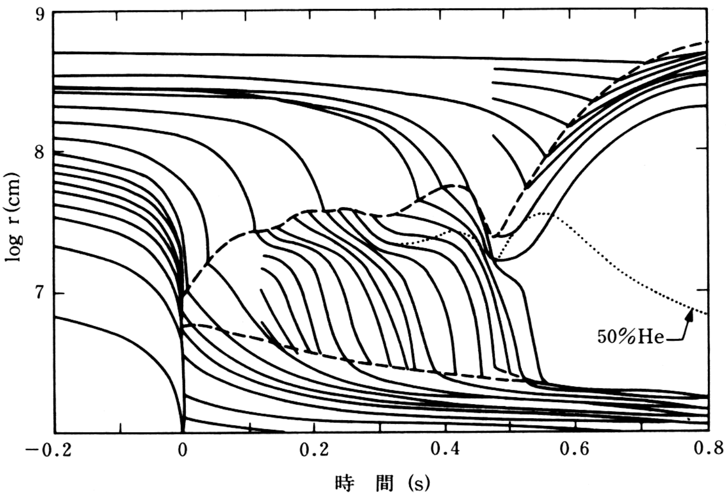


図 4-2　超新星爆発の球対称数値シミュレーション. 各実線は $m =$ 一定 の半径を示す. [Wilson 1985]

まって約 1 秒後に一旦収縮は停止して跳ね返る (バウンス) とともに, 外向きに衝撃波 (上の点線) が発生する. この衝撃波は失速しそうになる. 下の破線は, $t = 0$ に約 100 km の半径を持った原始中性子星で, ニュートリノが不透明な限界を示している. すなわち破線より外側ではニュートリノは自由に外に出られるが, 内側では, ニュートリノは吸収散乱を受け, 自由に外に出られない. これを太陽の光球に対応して, ニュートリノ球と呼んでいる. 原始中性子星の内部では, 温度は ~20 MeV にもなっているが, ニュートリノを放出しつつ半径が小さくなって約 10 秒内には (Burrows 1990) 中性子星の半径 10 km になると考えられている. この時に発生するニュートリノは, 1987 年にマゼラン星雲で発生した超新星爆発の際検出された [Hirata et al. 1987, Bionta et al. 1987]. 図 4-2 で一旦失速しかけた衝撃波が原始中性子星からのニュートリノ放射によって生き返り, $t = 0.44$ 秒で爆発する外層と中性子星とにはっきりと分かれている. 生き返った衝撃波が, 超新星爆発を起こすのに十分であるかどうかは, 今も論争中であるが, これは delayed メカニズムと呼ばれる中性子星形成の 1 つのシナリオである.

4-1-3　中性子星の形成時に放出される重力波

超新星爆発は光のスペクトルの解析により, 水素が存在するかしないかで Type II と Type I にまず分かれる. Type II はさらに光度曲線の形状からいくつかのタイプに分かれる. Type I も, Si のスペクトルが存在するのを Type Ia と呼び, Si がなくて He があるのを Ib, Si も He もないのを Ic と呼ぶ [Harkness and Wheeler 1990]. それぞれの超新星の頻度が, どのくらいかについては多くの研究がある [Evans, Van den Vergh and McClure 1989, Van den Vergh 1991, Van den Vergh and Tamman 1991, Van den Vergh and McClure 1994]. 超新星の発生率としては SNu=1

超新星/1 世紀/$10^{10}L_\odot$ を用いる. これは, おおよそ我々の銀河やアンドロメダ銀河 (M31) のような大きな銀河 1 個当たり, 1 世紀に 1 回という割合に対応している. Type Ia では, 中性子星は形成されないと考えられるので, 中性子星の形成される可能性があるのは Type II, Ib と Ic である. 特に Type II の超新星 SN1987A では, 放出されたニュートリノの全エネルギーが中性子星の結合エネルギー ($\sim 3\times 10^{53}$erg $\sim\ GM_{\rm NS}^2/2R_{\rm NS}$) と一致した [レビューとして Arnett, Bahcall, Kirshner and Woosley 1989]. 爆発のエネルギーは, この 100 分の 1 以下の 10^{51}erg であり, 光として放出されるのは, 爆発エネルギーのさらに 100 分の 1 位である [Burrows 1990]. Type II, Ib, Ic の割合から, 中性子星の形成の割合はおよそ 1 SNu である [Vand den Bergh and Evans 1994]. だから, 100 個の渦状銀河を考えると, 年に 1 回程度超新星爆発と中性子星の形成が期待されることになる. 我々から距離 15 Mpc の所にあるおとめ座銀河団の明るさは, $1.2\times 10^{12}L_\odot$ なので 100 個程度の大きな銀河に対応する [Lang 1980]. 早川幸男が近傍銀河に出現した超新星について論じている. その結果 M82 (距離 3 Mpc) の中心部に 40 個の超新星残骸があって, これから超新星の平均出現間隔が 3 ~ 5 年になることを示した [早川幸男 1992]. 以上をもとにすると, 中性子星が形成される超新星爆発は, おとめ座銀河団 [15 Mpc] の距離内で年に数回期待される. しかし, 鉄の中心核の重力崩壊が完全に球対称であるとすると, 3-3 節 例 2 で述べたように動的であっても, 重力波は放出されることはない. したがって, 重力崩壊が非球対称である必要があるが, 第一に重要な可能性は星の自転である.

星は一般に自転しており, 太陽では回転速度は 2 $\mathrm{km\,s^{-1}}$ 程度 [Allen 1955] であるが, 中性子星を形成する $M \gtrsim 13\ M_\odot$ の星では回転速度は 100 ~ 200 $\mathrm{km\,s^{-1}}$ ある [Currasco, Aguilar and Recillas-Cruz 1982]. 太陽表面からの脱出速度は 617 $\mathrm{km\,s^{-1}}$ [Allen 1955] であるから, 100 ~ 200 $\mathrm{km\,s^{-1}}$ という速度は, 決して小さくない. ここで, 無次元の角運動量パラメータ q を導入しよう. 系の質量 M が与えられた時, GM/c^2 は, 長さの次元を持っているので, $M(GM/c^2)c$ は角運動量の次元を持っている. そこで, 系の角運動量 J が与えられた時 q を

$$q = \frac{J}{M\cdot \dfrac{GM}{c^2}c} \tag{4-19}$$

で定義する. いま主系列時 (水素燃焼時) の星の構造は $N=3$ のポリトロープ (式 (4-6)) で近似できるが, 中心密度と平均密度は 54 倍違う [Chandrasekhar 1939]. すると, 質量が $M_{\rm c}$ の中心核 (鉄) の半径は, 星の質量を M, 星の半径を R としておおよそ

$$R_{\rm c} \simeq \left(\frac{M_{\rm c}}{50M}\right)^{\frac{1}{3}} R \tag{4-20}$$

で与えられる. いま主系列時に星が剛体回転しているとすると, 星の表面での回転速度を $v_{\rm rot}$ として, $M_{\rm c}\sim 1.4M_\odot$ の星の中心核の q は

$$q = 0.9\left(\frac{R}{R_\odot}\right)\left(\frac{M}{10M_\odot}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{v_{\rm rot}}{100\mathrm{km\,s^{-1}}}\right) \tag{4-21}$$

で与えられる. $M=40M_\odot$ と $M=18M_\odot$ に対して, R の値を代入すると [Allen 1955] q は

$$q = \begin{cases} 6.4\times\left(\dfrac{v_{\rm rot}}{100\mathrm{km\,s^{-1}}}\right) & M=40M_\odot \\ 4.4\times\left(\dfrac{v_{\rm rot}}{100\mathrm{km\,s^{-1}}}\right) & M=18M_\odot \end{cases} \tag{4-22}$$

となる．もし，主系列時の角運動量を保存したまま 1.4 $M_\odot$ の中心核が重力崩壊すると式 (4-22) より $q \simeq 10$ となる．さらに，主系列時に中心の方が速い差動回転をしているとすると，$q \gtrsim 10$ となる．さて，q が与えられたとして，重力崩壊を始めた鉄の中心核の半径が $R_{\rm b}$ になった時に遠心力が重力と同じになるとすると $R_{\rm b}$ は重力 = 遠心力より

$$\frac{GM_{\rm c}}{R_{\rm b}^2} \simeq \frac{\frac{25}{4}\ q^2\ (\frac{GM_{\rm c}}{c^2}\ c)^2}{R_{\rm b}^3} \tag{4-23}$$

であるが，これは

$$R_{\rm b} \simeq q^2 \times 10{\rm km}\left(\frac{M_{\rm c}}{1.4M_\odot}\right) \tag{4-24}$$

を与える．式 (4-24) より $q \gtrsim 1$ なら $R_{\rm b} \gtrsim 10{\rm km}$ =(中性子星の半径) となって，中性子星の半径になるまでにいつか遠心力が効きだして重力崩壊は球対称からずれるはずである．しかし，$q \ll 1$ なら，ほとんど遠心力は効かないことがわかる．さて，問題は水素燃焼後のヘリウム燃焼以降，星は赤色巨星になって半径が 1 AU 程度になることである．もし，この時に角運動量が中心核から外層に有効に輸送されると，重力崩壊する星の中心核の角運動量は式 (4-21) よりずっと小さくなる．角運動量輸送のメカニズムとしては，対流，磁場，音波，質量放出等 [Fricke and Kippenhahn 1972] が考えられるが，一番極端な場合として，赤色巨星段階でも剛体回転とする．1.4 $M_\odot$ の中心核の半径は 10^9cm 程度だから中心核の角運動量 $J_{\rm c}$ は

$$J_{\rm c} \sim \left(\frac{10^9{\rm cm}}{R}\right)^2 \left(\frac{M_{\rm c}}{M}\right) J_{\rm total} \sim 10^{-9} J_{\rm total} \tag{4-25}$$

主系列時の半径を (1-13) より $R_{\rm main}$ ($\sim 10^{11}$cm) とすると (4-25) より

$$q = \frac{J_{\rm c}}{M_{\rm c} \cdot \frac{GM_{\rm c}}{c^2}\ c} \sim 10^{-9} \left(\frac{M}{M_{\rm c}}\right) \left(\frac{R_{\rm main}}{\frac{GM_{\rm c}}{c^2}}\right) \left(\frac{v_{\rm rot}}{c}\right) \sim 10^{-5} \tag{4-26}$$

となって，q は大変小さくて中性子星になっても，遠心力は効かないことになる．しかし，第 3 章でも述べたように，中性子星はパルサーとして観測されており，その自転周期は，現在でも少なくとも 1 秒程度である．中性子星の慣性モーメントは，状態方程式にもよるが，だいたい 10^{45}gcm^2 [Arnett and Bowers 1977] である．したがって現在でもパルサーの $q_{\rm p}$ は中性子星の質量を $M_{\rm NS}$ として少なくとも

$$q_p \gtrsim \frac{10^{45} \cdot 2\pi}{M_{\rm NS} \cdot \frac{GM_{\rm NS}}{c^2}\ c} \sim 3.5 \times 10^{-4} \tag{4-27}$$

であるので，式 (4-26) の評価は極端すぎることがわかる．パルサーは生まれた時には，現在より速く自転していたから ∼1 ms の周期に対応する $q_{\rm p} \sim 0.1$ もありうる．したがって重力崩壊する前の鉄の中心核の q は

$$10^{-3} \lesssim q \lesssim 20 \tag{4-28}$$

の範囲にあると思われる．

Endal and Sofia [1978, 1979] は, 7 $M_\odot$ の回転星の進化を $t=0$ で $v_{\rm rot}$ =200 km s^{-1} として角運動量の分布に対して種々の仮定をして解いているが, 常に剛体回転という極端なモデル以外では進化の最終段階の超新星爆発前で, すでに遠心力が重力の ~10%に達している. 鉄の中心核の重力崩壊で $q \gtrsim 1$ だと遠心力が無視できない. 重力崩壊は球対称ではないから, 重力波が発生する. どのような重力波が発生するかは興味深い問題であるが, まず, いくつかの軸対称なニュートニアン数値シミュレーションが実行された [Finn 1991, Mönchmeyer, Schäfer, Müller and Kates 1991, Yamada and Sato 1994, Zwerger, Müller, Ruffert and Schäfer 1995]. 系は, 軸対称であるとする. すなわち, 球座標 (r, θ, φ) または, 円筒座標 (R, φ, z) を用いた時すべての変数が φ にはよらないとする. そして, 第1章の式 (1-43) ~ (1-47) の方程式を ~ 1.4 $M_\odot$ の鉄の中心核の重力崩壊に対して解く. そして, 得られた密度 $\rho(\mathbf{x}, t)$ を式 (3-79) に代入して h_+ を評価する. Mönchmeyer et al. [1991] は, 4つのモデル計算を行った. 結果は, 初期の回転エネルギー の大きさによって異なる. 図 4-3 に 4 つのモデルの波形を示す. 得られた結論は, 核力によって収縮が止まるか, あるいは回転によって収縮が止まるかによって波形は大きく変わる. 得られた重力波の最大振幅は距離 10 Mpc で 2×10^{-23} 程度で周波数領域は 500~1 kHz である. また, 静止エネルギーの何%が, 重力波のエネルギーとして変換されたかは, 最大 $8 \times 10^{-8} M_\odot c^2$ である. 角運動量 q に対する依存性は Finn [1991] による図 4-4 で示す. ここで $q=1$ は $J_{\rm c} = 1.76 \times 10^{49}{\rm gcm}^2 s^{-1}$ に対 応することに注意しよう. まず, $J_{\rm c}$ が小さいと, $I_{xx} - I_{zz}$ は $J_{\rm c}^2$ に比例するので, エネルギーは $J_{\rm c}^4$ に比例して増大する. しかし, $J_{\rm c}$ が大きくなりすぎると, 式 (4-24) によりバウンスする半径 $R_{\rm b}$ が大きくなるので, 重力崩壊が早く止まってしまい, 重力波はあまり放出されなくなる. 重力波放出が最大になるのは, $q \sim 1$ あたりになる. このような定性的な結論は, もっと簡単なモデル計算 [Saenz and Shapiro 1978] でも得られていた. また, 最近の詳しい計算 [Yamada and Sato 1994, Zwerger et al. 1995] でも確かめられている.

重力波の波形や振幅は, 状態方程式の硬さと角運動量に依存するので, 重力波が観測されれば, それらに対する情報を取り出すことが可能になる. 期待される重力波の最大振幅は我々の銀河中で起こったとして (すなわち距離 10 kpc として) ~ 10^{-20} 程度である. これは式 (3-47) による見積もりより 2 桁小さい. 原因は 2 つある. まず, $v \simeq 0.3$c ではないことと, 軸対称という点である. 軸対称な系が弱い重力波源であるのは, 位相相殺の効果のためである. 位相相殺は球対称重力崩壊を例に取ると分かる. すでに述べたように球対称な系からは重力波は放出されない. そこで例えば, 球殻状の球対称な物質が, 自己重力で球対称に落下することを考えてみよう. 球殻の 1 つの物質素片を考えるならば, 粒子が真っ直ぐ中心に向かって加速度を持って落下するのとほとんど同じだから, 3-3 節の例 1 のように重力波を放出するはずである. しかし, 球殻すべてについてそれぞれの寄与を足し上げると, それぞれの物質素片から放出される重力波の位相が異なるために, それらが消し合って結果としてゼロになる. これが位相相殺である. 軸対称な時にも同じようなことが起こる. 例えば, 中心の大きな質量のまわりを円軌道でケプラー回転する質量の軽い試験粒子を考える. 試験粒子が 1 個の時はいわゆる四重極公式で, 重力波が放出される. いま試験粒子の全質量は固定して同じ円軌道上に N 個の試験粒子を配置すると重力波放出率は N の関数として急激に減少することがわかる [Nakamura and Oohara 1983]. 極限として $N \to \infty$ を考えると重力波は放出されない. 四重極モーメントはあるが, それが時間変化しないからである. この極限は, 回転している軸対称なリングに対応する. リングの一つ一つの物質素

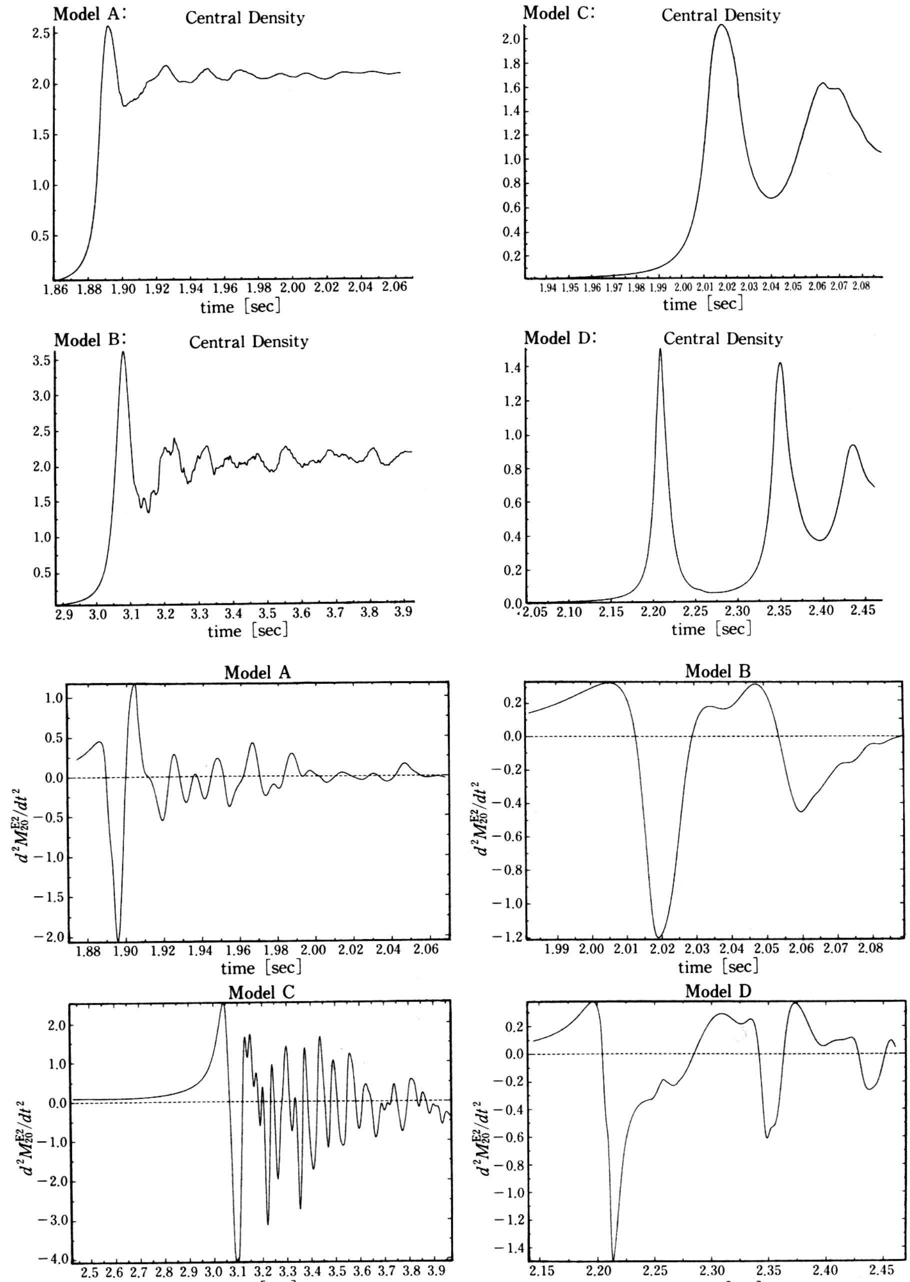


図 4-3　a) は回転軸対称重力崩壊の 4 つのモデル A, B, C, D の中心密度の変化を示す. b) に放出される重力波の波形を示す. [Mönchmeyer et al. 1991]

片を考えるならば, 加速度をもって回転しているから重力波を放出する. しかし, リング全体についての寄与を足し上げると, それぞれの重力波の位相が消し合って結果としてゼロになる. 重力波放出に寄与するのは, リングの動径方向の加速度運動である. すなわちリング全体としての収縮運動である. これが, 軸対称な系が弱い重力波源となる理由であり, いろいろな粒子がブラッ

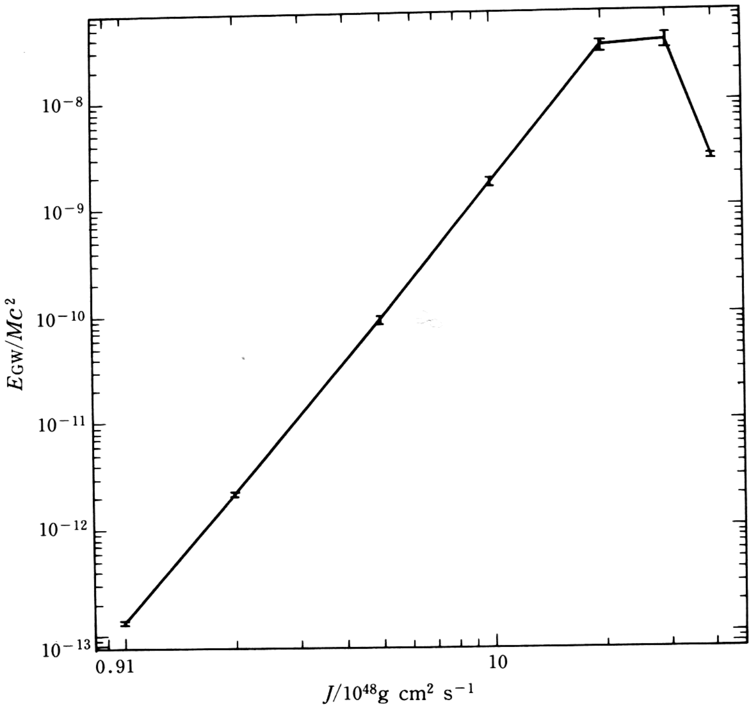


図 4-4　回転重力崩壊で放出される重力波の全エネルギーと星の角運動量 J の関係. [Finn 1991]

クホールに落下する場合も全く一般的に成立していることがわかっている [Nakamura, Oohara and Kojima 1987].

回転が超新星爆発に有利かと言うと, 多くの計算はむしろ爆発エネルギーは小さくなることを示している [Le Blanc and Wilson 1982, Symbalisty 1984, Yamada and Sato 1994]. 理由は, 遠心力のため, 中心核が重力ポテンシャルの深いところまで収縮しないので, 爆発も弱いというものである. しかし, 重力波の源は必ずしも超新星爆発を起こす必要はない. ブラックホールになってもよい. そこで, 超新星爆発そのものより, コアの進化に目を向けると例えば, Symbalisty [1984] の ROT2 というモデルでは, 回転軸方向に $\sim$30 km, 回転軸に垂直な方向に $\sim$60 km の回転楕円体になっている. このような扁平な構造は, Secular 不安定 [Chandrasekahr 1970, Friedman and Schutz 1978, Yoshida and Eriguchi 1995] , または分裂に対して不安定である可能性 [Goldreich and Lynden-Bell 1964, Ruffini and Wheeler 1971] がある. 前者に対しては Lai and Shapiro [1995] が, 後者に対しては Nakamura and Fukugita [1989], Bonnell and Pringle [1995], Müller [1995] が重力波放出を評価している. 図 4-6 に Lai と Shapiro による Secular 不安定による重力波を示す.

回転星の重力エネルギーを W, 回転エネルギーを T とすると, $T/|W| > 0.14$ になると $m = 2$ の棒状のモードに対して, 重力波を考慮すると, 回転星は不安定である. この場合高振動数側で 3 軸不等になり重力波を放出しはじめる. その後重力波の振幅と振動数は減少して最後には軸対称になって重力波の放出は止まる. 分裂モデルでは, 2 体に分裂した時, 期待される重力波の振幅

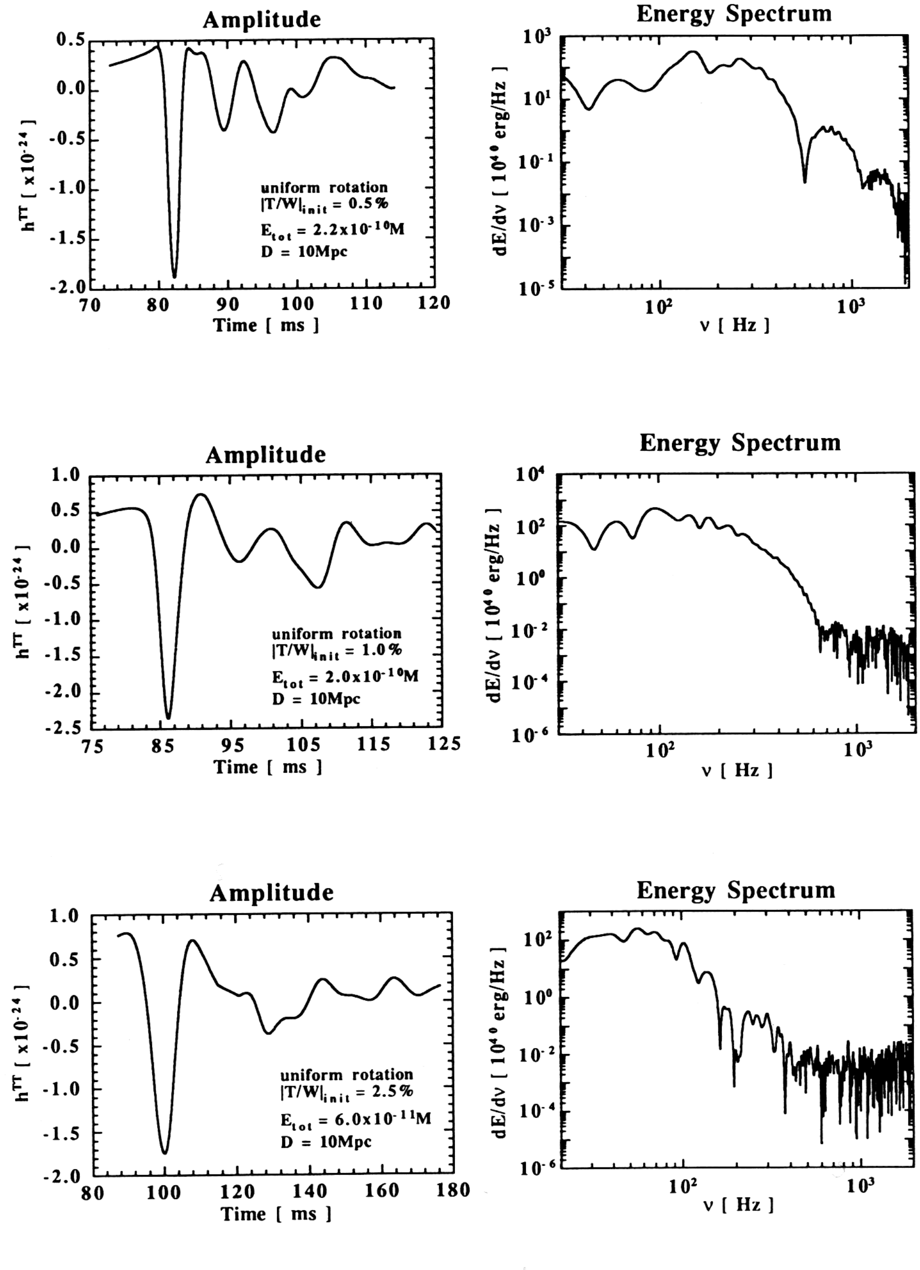


図 4-5　回転重力崩壊での重力波の波形とエネルギースペクトル. [Yamada and Sato 1994]

は 2 体の間隔を r, それぞれの質量を m_1, m_2, 源までの距離を D として

$$h \simeq 3 \times 10^{-19} \left(\frac{D}{10\mathrm{kpc}}\right)^{-1} \left(\frac{r}{10^7\mathrm{cm}}\right)^{-1} \left(\frac{m_1}{0.7M_\odot}\right) \left(\frac{m_2}{0.7M_\odot}\right) \tag{4-29}$$

また, 振動数 f は

$$f = 70\mathrm{Hz} \left(\frac{m_1 + m_2}{1.4M_\odot}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{r}{10^7\mathrm{cm}}\right)^{-1.5} \tag{4-30}$$

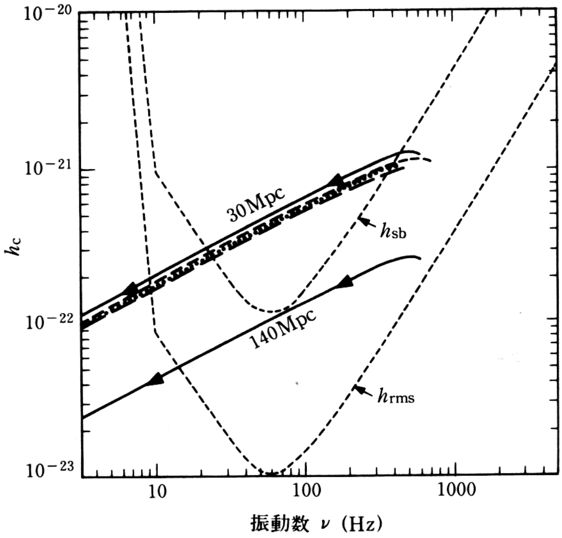


図 4-6　中性子星の Secular 不安定で発生する重力波の振幅 h_c と振動数の関係．点線は LIGO の感度．実線が 30 Mpc と 140 Mpc に置いたときの振幅を示す．高振動数側で，3 軸非等になり，重力波を放射して，最後には，軸対称になって，振幅も振動数もゼロになる．[Lai and Sbapiro 1995]

となる．$r = 10^7$cm から合体までは

$$t = 9s \left(\frac{\eta}{0.3}\right)^{-1} \left(\frac{r}{10^7\mathrm{cm}}\right)^4 \left(\frac{m_1}{0.7M_\odot}\right)^{-1} \left(\frac{m_2}{0.7M_\odot}\right)^{-1} \left(\frac{m_1+m_2}{1.4M_\odot}\right)^{-1} \tag{4-31}$$

である．ここで η は, 2 体が点粒子でない時に起こる位相相殺効果の係数である [Nakamura and Sasaki 1981]．式 (4-29) のような重力波が 9s 程度続く可能性があるわけである．図 4-7 に上のような分裂の数値シミュレーションの 1 例を示す [観山 1992]．この場合 4 体に分裂しているが, どちらにしても分裂するまでは, ほぼ軸対称であったので, 重力波の放出量は少ないが, 分裂後は重力波放出量は大変大きくなっている．このシミュレーションでは, 重力波放射による反作用やニュートリノの放出過程が入っていないので, 今後はさらに精密な, 現実により近いシミュレーションが期待されている [Zwerger et al. 1995].

さて, 第 3 章で球対称な系からは重力波は放出されないと述べた．それでは, 角運動量がほとんどゼロの鉄の中心核の重力崩壊からは, 重力波は放出されないのだろうか．角運動量がゼロに近ければ, ほとんど球対称に近いはずだから, 重力波は小さいはずであると考えるのが普通正しい．しかし, そうでもないかもしれないのである．1987 年 3 月 23 日に大マゼラン星雲に出現した II 型超新星 SN1987A では, Ni^{56} 起源の X 線が予想より早く見えたので, 超新星爆発中に物質の混合が起きたと考えられている [レビューとして Arnett, Bahcall, Kirshner and Woosley 1989]. この混合の原因はレイリー-テイラー不安定であるが, 図 4-9 にこのような混合のシミュレーション例を示す．

もし, このような混合が原始中性子星の内部でも起これば [Bethe 1990], 放出される重力波の強度は, $f \sim 100$ Hz で, $h \sim 3 \times 10^{-22}(r/30\mathrm{kpc})^{-1}$ となる [Burrows 1995]．この評価は, 次のようにすれば, おおよそ出すことができる．一旦バウンスする時の半径はすでに述べたように 100

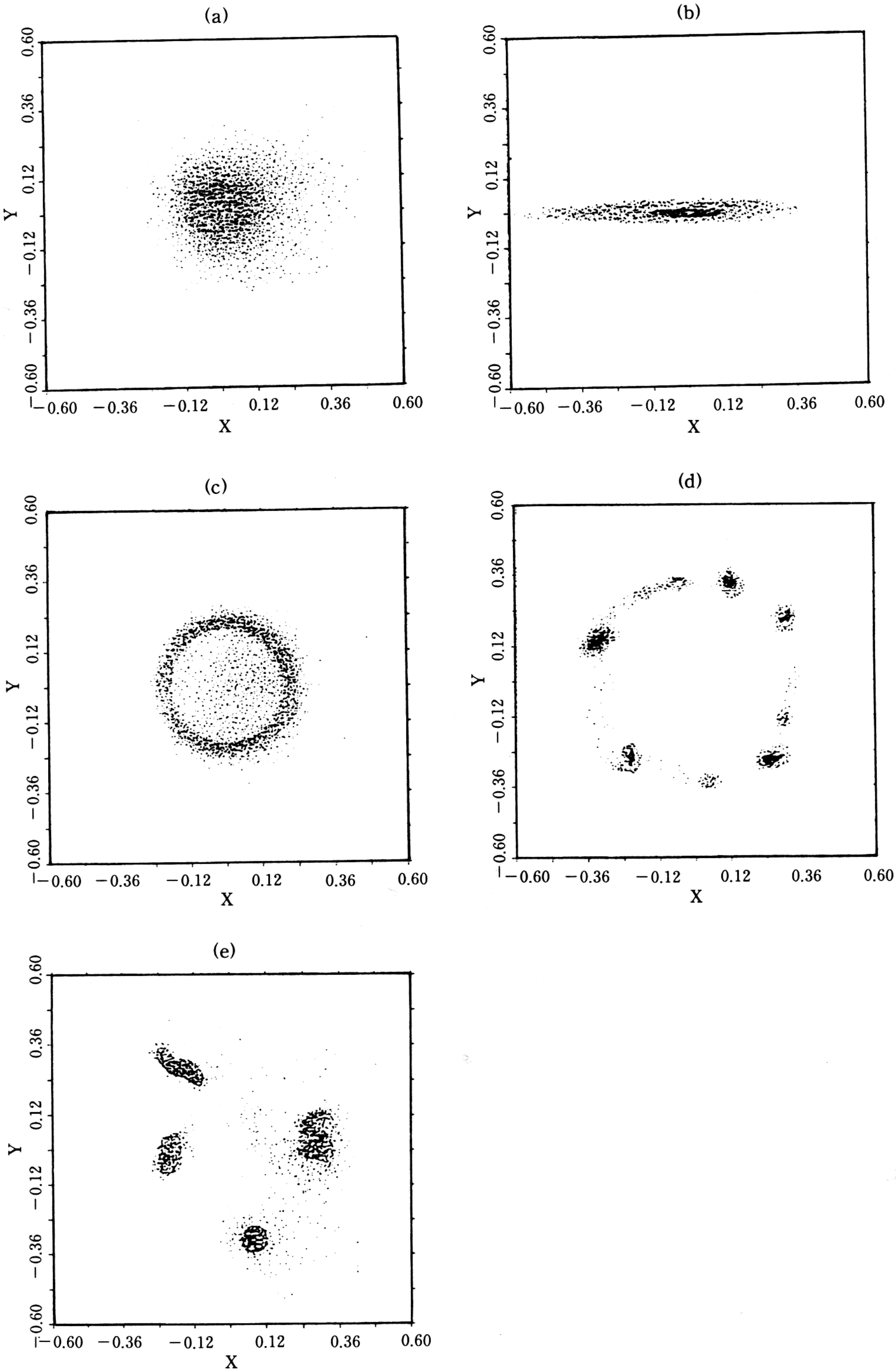


図 4-7　回転する原始中性子星の進化のシミュレーション [観山 1992]．初期に球状の中心核が回転を伴って重力収縮する．初期状態から 8 ミリ秒経過した場面を回転軸から見た図 (a) と横から見た図 (b) である．円盤はリングへと進化し，重力不安定性のため分裂する (c),(d)．分裂片は合体する (e)．

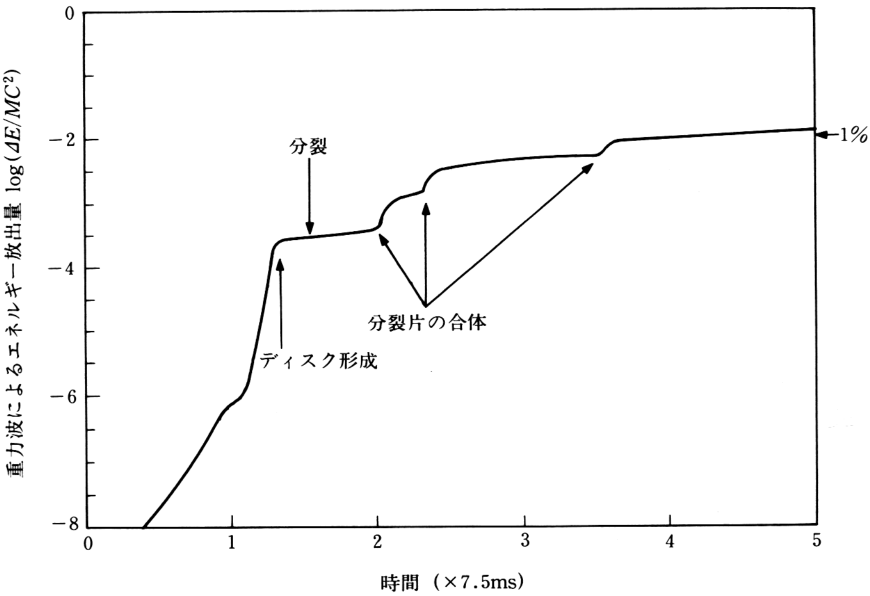


図 4-8　重力波によるエネルギー放出積分値 [観山 1992]

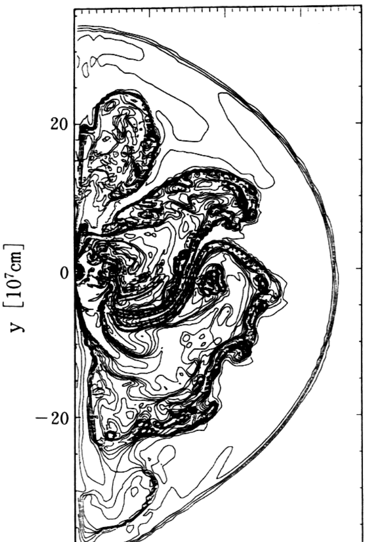


図 4-9　原始中性子星と Shockwave の間で起こるレイリー-テイラー不安定性の 2 次元数値シミュレーションで，エントロピーの等高線を示す [Janka and Müller 1994].

km くらいで, その後レイリー-テイラー不安定により混合したとすると

$$\bar{\rho} \sim 10^{12} \mathrm{g\,cm^{-3}}$$

より

$$f \sim \sqrt{G\rho} \sim 10^2 \mathrm{Hz}\ , \qquad \left(\frac{v}{c}\right)^2 \sim 0.01$$

また h は (3-45) より

$$h \sim \frac{2GM_{\mathrm{eff}}}{c^2 r} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \sim 3 \times 10^{-22} \left(\frac{r}{30\mathrm{kpc}}\right)^{-1} \left(\frac{M_{\mathrm{eff}}}{0.1 M_\odot}\right)^{-1} \tag{4-32}$$

となる. ここで, M_{eff} は非球対称運動をしている部分の質量である.

超新星爆発と関係して興味深い最近の観測事実は, パルサーの固有運動である. 固有運動とは, 視線方向に垂直な速度成分で, Lyne and Lorimer [1994] によると 450±90 km s^{-1} である. これは, 太陽近傍の銀河回転速度 ($\sim$ 250km s^{-1}) と較べても大変大きく, かなりのパルサーは銀河系の重力ポテンシャルから脱出する可能性すらある. このような大きな速度は超新星爆発時に得られたと思われるが, その起源はよくわかっていない. 例えば, ニュートリノの放出が非等方であるとか爆発が非等方であるとか, が考えられる. しかし, どちらにしても速度の方向性は何らかの非球対称性が生じていたことを意味しているので, 重力波の源と関連して興味深い.

4-2 ブラックホールの形成と重力波

それでは, 超新星爆発が弱くて, 外層を完全に吹き飛ばせないとどうなるのであろうか. 外層は, 中心にある原始中性子星に遅かれ早かれ落下することになる. ところが, 中性子星の最大質量は, どんなに大きく見積もっても, 3 $M_\odot$ であるから, 外層の質量が, 1.6 $M_\odot$ 以上あれば, 安定な平衡解は存在しえずにどこまでも重力崩壊が続くことになる.

上のような重力崩壊を明らかにするには, 1-3 節で展開した初期値問題としての一般相対性理論を考える必要がある. 1-3 節の議論をまとめると, (3+1) 次元形式での初期値問題は例えば次のように解くことになる.

Step 1	与えられた J_i, ρ_{H} に対して, 拘束方程式 ((1-75) と (1-76)) を解いて $t=0$ での γ_{ij} と K_{ij} を決める.
	⇓
Step 2	座標条件を与えて α と β^i を決定する.
	⇓
Step 3	式 (1-71), (1-77), (1-81), (1-84), (1-86), (1-88) を解いて $t+\Delta t$ での γ_{ij}, K_{ij}, ρ_{H}, J_i, ρ, p を決定する.
	⇓
Step 4	t を $t+\Delta t$ に進めて, step 2 に戻る.

このようにして知りたい時間まで時空を進めればよい. 多くの場合, 解は数値的に解かざるをえないので, 数値相対論と呼ばれる.

4-2-1　球対称な場合

まず, 球対称な問題を考えよう. 球対称な場合 (3+1) 次元形式での最も一般的な計量テンソルの形は

$$\mathrm{d}s^2 = -(\alpha^2 - \beta_r\beta^r)\,\mathrm{d}t^2 + 2\beta_r \mathrm{d}t\mathrm{d}r + A^2\mathrm{d}r^2 + B^2 r^2\,(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2) \tag{4-33}$$

となる. ここでは, Shapiro and Teukolsky [1980] による計算例を示そう. まず, 座標条件としては $A = B$ と $K = 0$ を採用する. 前者より β^r が決まって

$$\beta^r = -\frac{3}{2}\,r\int_r^\infty \alpha K^r_r \mathrm{d}r/r \tag{4-34}$$

となる. 一方, $K = 0$ という条件は極大切断条件 (Maximal Slicing Condition) と呼ばれており, 式 (1-77) のトレースから α を決める式

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\,\frac{\partial}{\partial x^i}\,\sqrt{\gamma}\,\gamma^{ij}\,\frac{\partial\alpha}{\partial x^j} = (4\pi\,(\rho_H + S^l_l) + K_{ij}K^{ij})\,\alpha \tag{4-35}$$

が得られる. 式 (4-35) は今の場合

$$\frac{1}{A^3r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\,Ar^2\,\frac{\partial\alpha}{\partial r} = (4\pi\,(\rho_H + S^l_l) + K_{ij}K^{ij})\,\alpha \tag{4-36}$$

となる. さて, 状態方程式として自由中性子を採用しよう. そうすると, 図 4-1 より中性子星の最大質量は 0.737 $M_\odot$ となる [Oppenheimer and Volkoff 1939]. いま, M として最大質量の 2 倍の $M = 2\times 0.737M_\odot$, 初期の半径 40 M の自由中性子球の重力崩壊を解いた例を示そう.

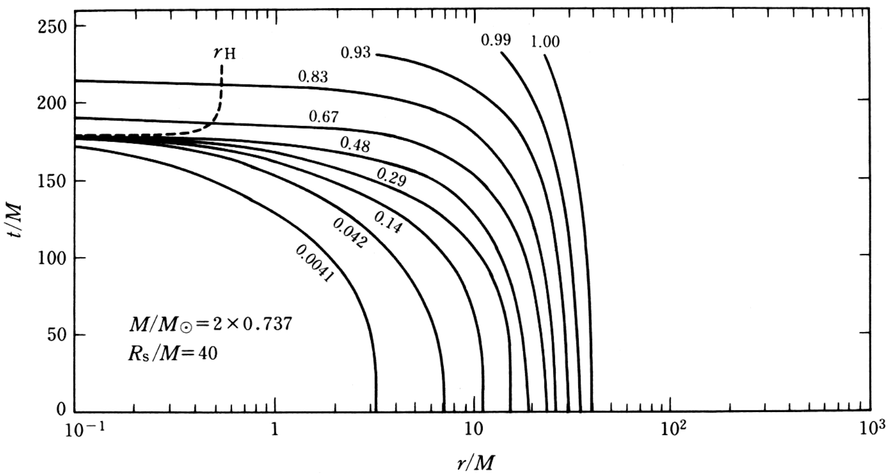


図 4-10　ブラックホールの形成. 球対称重力崩壊の数値シミュレーション. 状態方程式は, 自由中性子で, 全質量 (M) は, 中性子星の最大質量の 2 倍である. 横軸は GM/c^2 単位での半径, 縦軸は GM/c^3 単位での時間である. $r_\mathrm{H}(t)$ は事象の地平線である. 各実線はラグランジ殻 (m/M = 一定) の半径の軌跡である.

横軸は GM/c^2 単位での半径, 縦軸は, GM/c^3 単位での時間である. 各実線についた数字は, m/M を表す. 例えば, 0.0041 とは, その内側に全体の 0.41%の質量が入っている球面の半径の変化を

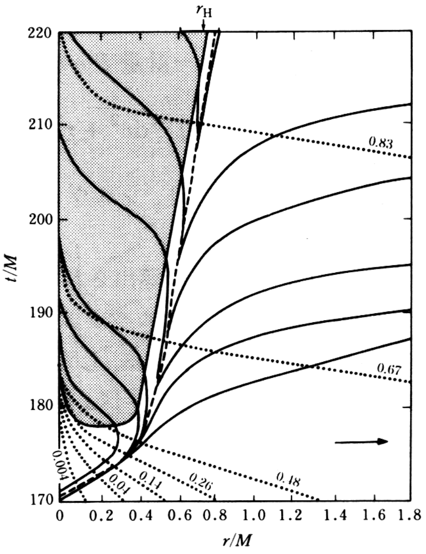


図 4-11　図 4-10 の中心部分の拡大図. 点線はラグランジ殻 (m/M = 一定), 実線は外向きに放射した光の軌跡である. 破線 $r_\mathrm{H}(t)$ は, 事象の地平線をあらわす. グレイな領域は, trapped 領域 (光の波面の面積が増大しない領域) である.

表す. m/M の小さなものから大きなものまで, 半径が小さくなって重力崩壊がどんどん進行していっているのがわかる.

図 4-11 は図 4-10 の拡大図で, 図 4-10 の実線は, 図 4-11 では点線に対応している. 図 4-11 における実線の意味は, 次の通りである. ある (t, r) を出発点として, 外向に発射した光の軌跡である (光は測地線に従う). 右側の実線群は, 時間と共に r が増大するが, 左側の実線群は, 外向に光を放射したにもかかわらず, 結局 $r = 0$ に落下している. その境界を $r_\mathrm{H}(t)$ として破線で示している. この破線は, 事象の地平線 (Event Horizon) と呼ばれている. 事象の地平線の内側からは, 外向に発した光すら, 事象の地平線の外 (すなわち $r > r_\mathrm{H}(t)$) に出られない. こういう意味で, $r_\mathrm{H}(t)$ の存在する時空をブラックホールと呼んでいる. ブラックホールについては, 第 1 章の最初にあげた一般相対性理論の教科書や Chandrasekhar [1992], Hawking and Ellis [1977] に詳しいので, それを参照してほしい. ここでは唯一性定理についてのみ述べておく. 図 4-11 の t の大きい所で $r > r_\mathrm{H}$ の時空は定常的だと考えられる. また, 物質は存在しないので, 真空と考えてよい. 一般には $r > r_\mathrm{H}$ の時空は非球対称である. しかし, 非軸対称な時空は, 重力波を放出するので, 軸対称になると考えられる. そうすると, ブラックホール時空の行き着く先はアインシュタイン方程式の軸対称定常解である. Israel [1967], Carter [1971] そして Robinson [1975] によって $q < 1$ のカー計量 [Kerr 1963] が, $r > r_\mathrm{H}$ で非特異な唯一の時空であることが証明されている. 上の q は, 式 (4-26) で定義した q と本質的に同じもので, ブラックホールの角運動量を J, 重力質量を M として $q = cJ/(GM^2)$ で与えられる. カー計量は具体的には, $c = G = 1$ の単位系で

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &= -\Delta\rho^{-2}\ (\mathrm{d}t - qM\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi)^2 + \sin^2\theta\rho^{-2}\ [(r^2 + q^2M^2)\ \mathrm{d}\varphi - qM\mathrm{d}t]^2 \\
&\quad + \rho^2\Delta^{-1}\mathrm{d}r^2 + \rho^2\mathrm{d}\theta^2\ , \\
\Delta &= r^2 - 2Mr + q^2M^2\ , \qquad \rho^2 = r^2 + q^2M^2\cos^2\theta \qquad (4\text{-}37)
\end{aligned}
$$

カー計量は q のかわりに $a(=qM)$ という文字で表現されることが多い．式 (4-37) で表されるブラックホール解をカーブラックホールと呼ぶ．カー計量で $q=0$ とおくと，

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t + (1-\frac{2M}{r})^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\ (\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2) \tag{4-38}$$

となる．式 (4-38) の計量は明らかに球対称であり，シュヴァルツシルト計量と呼ばれている [Schwarzschild 1916].

式 (4-38) は実はよく見ると式 (3-191) で，すでに導出されていたことがわかる．違う点は式 (3-191) では，中性子星の半径 R_{NS} 内では，シュヴァルツシルト計量と異なる点である．図 4-11 でも物質の外ではシュヴァルツシルト計量と同じである．したがって，図 4-11 はシュヴァルツシルトブラックホールの形成過程と考えることができる．シュヴァルツシルト計量でのリーマンテンソルを計算してみよう．定義に従うと

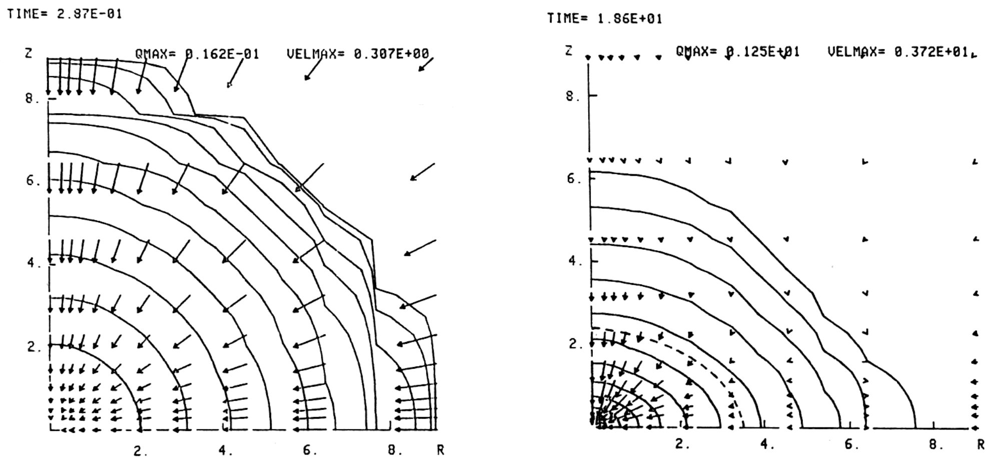
$$R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta} = 48\left(\frac{M}{r^3}\right)^2 \tag{4-39}$$

これから明らかなようにリーマンテンソルの 2 乗は原点 $r=0$ で発散する．リーマンテンソルは潮汐力という物理量であったから，式 (4-39) は，潮汐力が無限大になるという時空の特異性を表している．カー計量にも同様の特異性があるが，両者とも特異性が事象の地平線の中にある．ブラックホールとは，このような時空構造を呼ぶ．これに対して，事象の地平線の外に特異性があったり [Tomimatsu and Sato 1973]，事象の地平線が存在しないのに特異性がある時空 [Zipoy 1966, Voorhees 1970] を裸の特異性 (Naked Singularity) と呼ぶ．

4-2-2　軸対称な場合

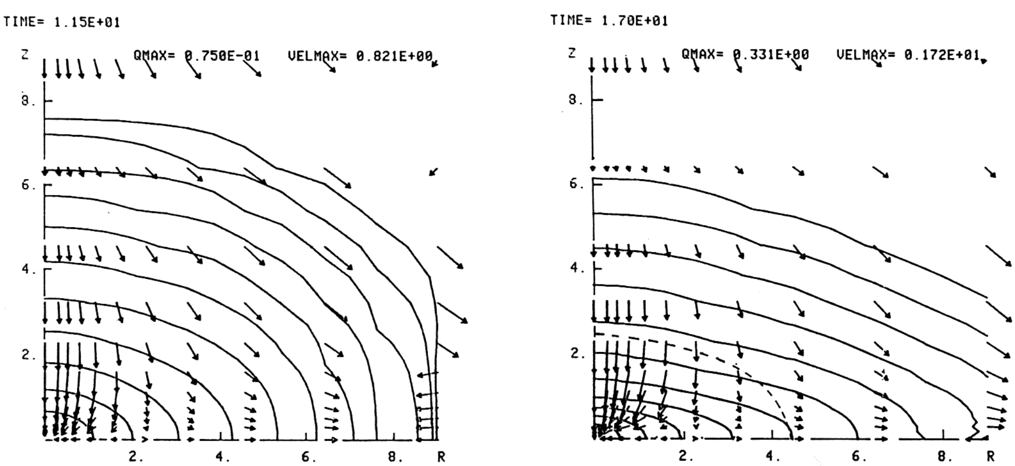
さて，回転星が重力崩壊してブラックホールになる時，カーブラックホールのような構造を持つブラックホールができるのであろうか? 図 4-12, 図 4-13 にそのような計算例を示す [Nakamura 1981, Nakamura and Sato 1981a]．回転星は軸対称として，円筒座標 $(R,\ \varphi,\ z)$ を用いる．すべての物理量 Q は φ によらない形 $Q(R,\ z,\ t)$ をしているとする．(3+1) 次元形式でのアインシュタイン方程式を解く (実は，(3+1) 次元形式の 1 つの変形の ((2+1)+1) 次元形式を使っているが，ここではその詳細には立ち入らない．詳しくは，Nakamura, Oohara and Kojima [1987] の第 1 部と参照文献を見て頂きたい)．時間座標 α としては，極大切断条件 (4-35) ないしは，超幾何切断条件 [Nakamura, Oohara and Kojima 1987] を用いる．空間座標の条件としては，$\beta^R=\beta^Z=0$ である．

図 4-12, 図 4-13 では $p=\rho\epsilon/3$ として解いている．図 4-12 は，$q=0.5$ の場合のシミュレーション結果である．図 4-12-a では横軸は R，縦軸は z で $z=0$ 面に関して上下対称を仮定しているので，$z\geq 0$ の上面だけを表している．実線は密度の等高線で各等高線は最大密度を $\rho_{\max}$ として $\rho=\rho_{\max}\ 10^{-n/2}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots 11)$ を表している．矢印は速度ベクトル $(J_R/\rho,\ J_Z/\rho)$ を表している．また，時間の単位は GM/c^3 である．最初は，重力崩壊は，ほとんど球対称である．図 4-12-b で，点線は事象の地平線より強い条件の見かけの地平線 (Apparent Horizon) を表している．この見かけの地平線は，この面から光を外向きに発射してももはや面積が広がらないものとして定義される．一般に事象の地平線は見かけの地平線の外に存在する [Hawking and Ellis 1973]．したがって，図 4-12-b は，ブラックホールができたことを示している．回転は，重力崩壊



(a) (b)

図 4-12　一般相対論的な回転重力崩壊. $q = 0.5$ で, 横軸と縦軸は GM/c^2 単位での R と Z (円筒座標) である. 実線は物質の単位座標体積当たりの静止質量密度 ϱ の等高線で, 矢印は速度ベクトル $(J_R/\varrho, J_Z/\varrho)$ を表す. 等高線は $\varrho = \varrho_{\max} 10^{-\frac{n}{2}}$ $(n = 1, 2, \cdots, 11)$ である. 時間の単位は GM/c^3 で, a) はほとんど初期を表し, b) では点線は見かけの地平線 (Apparent Horizon) である [Nakamura and Sato 1981a].



(a) (b)

図 4-13　図 4-12 と同様であるが, $q = 1.05$ である. b) で点線は見かけの地平線 (Apparent Horizon) である. 事象の地平線は点線の外側に存在すると考えられる. [Nakamura and Sato 1981a].

を非球対称にするが, 物質はほとんどすべてブラックホールに吸い込まれる. 図 4-13 は $q = 1.05$ の場合のシミュレーション結果である. 図 4-13-a ですでに遠心力の効果は大きい. z 軸付近では, ほとんど真っ直ぐ重力崩壊しているのに, $z < 2$, $R \sim 5$ 付近では, むしろ外に向かっている. しかし, 最終的には, 大半の物質はブラックホール (図 4-13-b の点線) 内に吸い込まれる. しかし, $q > 1$ の場合, ブラックホールは形成されなかった (図 4-14). このようなシミュレーションは, 状

態方程式と初期の回転則と密度分布を変えていくつか行われたが, $q<1$ の時は事象の地平線ができて, ブラックホールができることがわかった [Nakamura and Sato 1981a, Stark and Piran 1985]. これは, $q<1$ の時のみ, カー時空に事象の地平線が存在することと合っており, Penrose の唱える宇宙検閲仮定 (裸の特異点は生じないのではないかという主張, Penrose [1973]) を数値的に支持するものである.

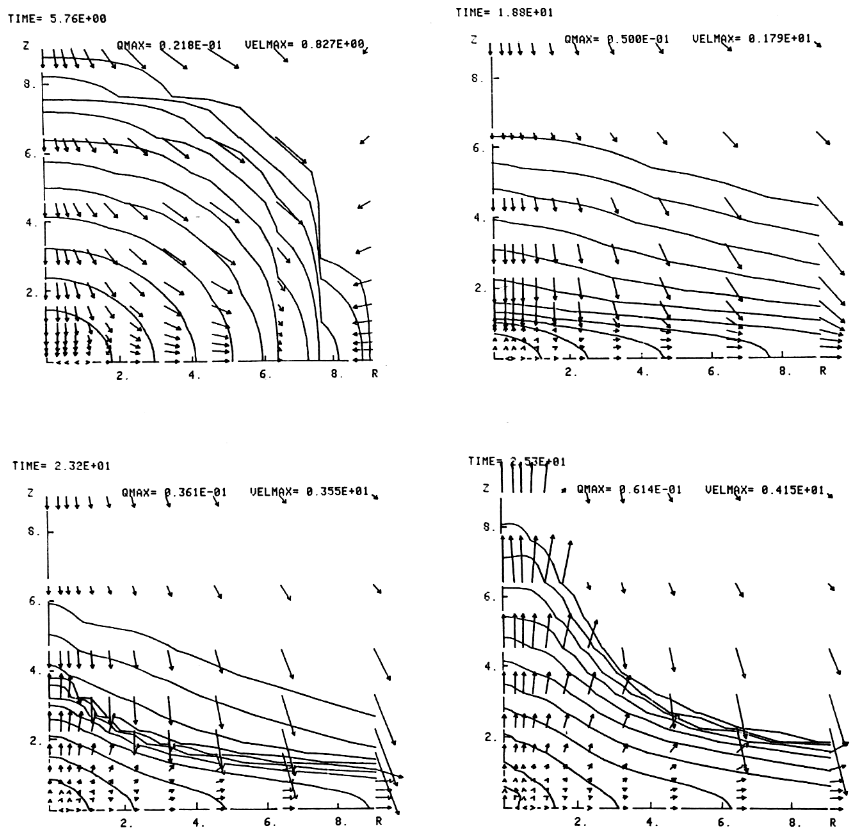


図 4-14　図 4-12 と同様であるが, $q=1.46$ で, 見かけの地平線もできない [Nakamura and Sato 1981a].

さて, 回転するブラックホールが形成された時, いかなる重力波が放出されるのであろうか. Stark and Piran [1985] による結果を示す. 彼らは, 重力波の波形を見るのに都合のよい Bardeen and Piran [1983] による座標条件を使ったのがポイントであった. それらは空間座標については, 動径ゲージ (radial gauge), 時間については極切断 (polar slicing) と呼ばれているものである. 彼らは $p=\epsilon\rho$ という状態方程式で, q をいろいろ変えて回転ブラックホールの形成される時に放射される重力波の計算を行った. 図 4-15 に放出された重力波の全エネルギー ΔE を q の関数として示す.

qが小さい時には, $\Delta E \propto q^4$ である. これは, $\Delta E \propto J^4$ を意味するからニュートニアンと同じ依存性である. $q\sim 1$ で放出される重力波は頭打ちになる. ブラックホールができるのは, すでに述べたように $q\leq 1$ の場合のみである. ▲と■の違いは, 初期に抜き去る内部エネルギーの違い

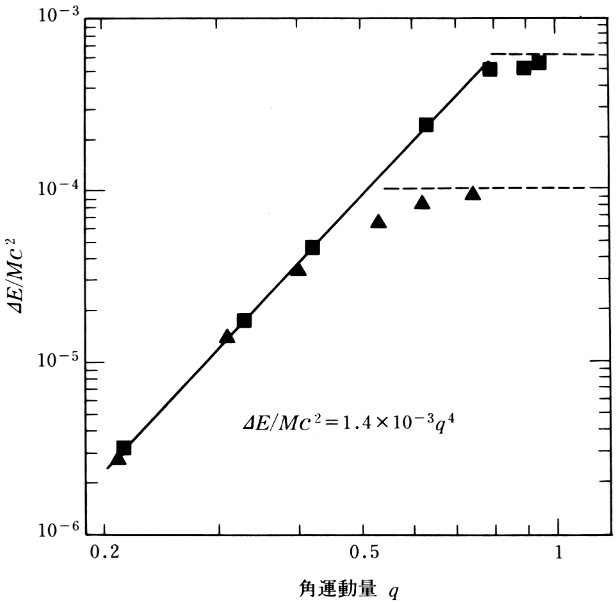


図 4-15 回転するブラックホールが形成されるときに放出される重力波 $\Delta E/Mc^2$ と角運動量パラメータ $q \equiv J/(M \cdot \frac{GM}{c^2}c)$ の関係．▲と■では，初期の内部エネルギーを抜く量が違う．(■では 1 %, ▲では 40 %) [Stark and Piran 1985]

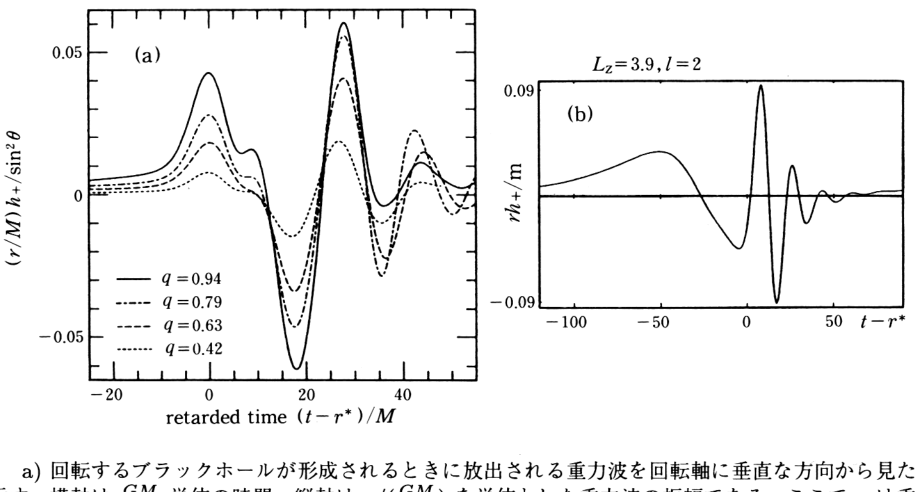
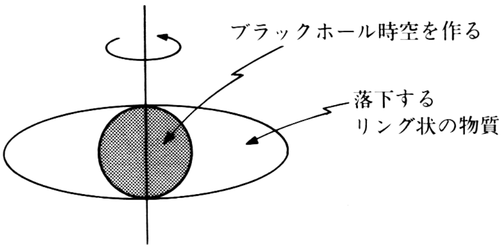


図 4-16 a) 回転するブラックホールが形成されるときに放出される重力波を回転軸に垂直な方向から見た場合の $h+$ を示す．横軸は $\frac{GM}{c^3}$ 単位の時間，縦軸は $r/(\frac{GM}{c^2})$ を単位とした重力波の振幅である．ここで r は重力波源までの距離を示す [Stark 1989]．b) 質量 M のブラックホールに質量 $m(\ll M)$ の落下する回転するリングが放射する重力波を回転軸に垂直な方向から見た場合の波形．横軸は $\frac{GM}{c^3}$ 単位の時間で，縦軸は $r/(\frac{GM}{c^2})$ を単位とした h_+ である．a) と b) の波形が似ていることに注意しよう．[Nakajima, Oohara and Kojima 1987].

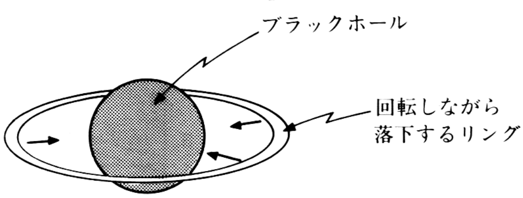
である．放出されるエネルギーの最大値は $5\times10^{-4}Mc^2$ である．これは, 4-1 節で述べたニュートンの回転重力崩壊に較べると 3 桁近く大きい．

図 4-16-a に異なる q に対する波形を示す．(この波形は回転軸に垂直な方向から見た h_+ モードである．四重極波 ($\propto \sin^2\theta$) が優勢である．) 振幅は q によって変わるが, 波形自体は同じものであることがわかる．$M = 10M_\odot$, $r = 10\mathrm{kpc}$ とおくと, 最大振幅は $h_+ \sim 2.5\times10^{-18}$ で振動数は $0.7 \sim 1.6$ kHz である．(h_+ が意外に大きいのは, M が大きいためで, $1M_\odot$ とすれば

$h_+ \sim 2.5 \times 10^{-19}$ である.) このようなブラックホールの形成の起きる頻度はどのくらいかははっきりしないが, X 線連星中に存在すると考えられているブラックホールについては, 質量は 10 $M_\odot$ 程度であり [McClintock 1992], その形成率は我が銀河中で 3×10^4y に 1 回程度と考えられている [Narayan, Piran and Shemi 1991]. 単独星でブラックホールが形成されたとしても, 観測的には, 形成された時に発生する図 4-16-a のような重力波を検出しない限りその存在確認は難しいと思われる. したがって, 上の 3×10^4y に 1 回という割合は, 下限値と見るべきである. (1-17) の銀河の個数密度を用いると, 1 年に 1 イベントおきる平均距離は 100 Mpc となり期待される振幅は最大で $h \sim 2.5 \times 10^{-22}$ となる.



(a)



(b)

図 4-17　a) 回転ブラックホールの形成と重力波の発生モデル. b) ブラックホールに回転しながら落下するリング. a) を単純化すると b) になる.

図 4-16-a の波形とそっくりなのが, 図 4-16-b の波形である. 図 4-16-b はシュヴァルツシルトブラックホールに回転するリングが落下する時に放出される重力波を計算したものである [Nakamura, Oohara and Kojima 1987 : 135]. これをどのように計算するのかは, 上の参照文献に詳しいが, ここでは定性的な説明を行っておく. アインシュタイン方程式の右辺の物質のエネルギー運動量テンソルとしてはシュヴァルツシルト時空での測地線に従っている試験粒子 $z^\mu(\tau)$ を考える. 試験粒子の質量 m は, ブラックホールの質量 M より十分小さいので, 試験粒子のエネルギー運動量テンソルはブラックホール時空に摂動を起こすと考える. つまり, $g_{\mu\nu}$ を

$$g_{\mu\nu} = g_{\mathrm{B}\mu\nu} + \frac{m}{M}\, h^{(1)}_{\mu\nu} + \left(\frac{m}{M}\right)^2 h^{(2)}_{\mu\nu} + \cdots \qquad (4\text{-}40)$$

と展開する．$g_{B\mu\nu}$ はシュヴァルツシルトブラックホールの計量で，

$$G_{\mu\nu}(g_{B\mu\nu}) = 0 \qquad (4\text{-}41)$$

を満たす．そこで，$T_{\mu\nu}$ は m に比例するから $T_{\mu\nu} = m\,\tilde{T}_{\mu\nu}$ として m について 1 次までを考えると式 (2-117) と同様にして

$$\frac{m}{M}\,G^{(1)}_{\mu\nu}\,(h^{(1)}_{\mu\nu}, g_{B\mu\nu}) = 8\pi m\,\tilde{T}_{\mu\nu} \qquad (4\text{-}42)$$

となる．式 (4-42) を解けば，試験粒子がバックグラウンド時空を運動した時に放出される重力波が計算できることになる．リングにするには，試験粒子をたくさんリング状に並べればよい．放出される重力波の波形だけでなく，定量的にもリングから放出される重力波のエネルギーは，最大 $2\times10^{-3}\,(m/M)mc^2$ [Nakamura, Oohara and Kojima 1987] である．これをリングとブラックホールの質量が同じである場合に外挿すると $m = 0.5M$ とすればよいから，重力波のエネルギーは $5\times10^{-4}Mc^2$ となって，Stark and Piran [1985] の最大値を与える．

この波形とエネルギーの一致は偶然とは考えにくい．次のような物理的描像が成り立つ．回転星が重力崩壊してブラックホールになる時，遠心力によって回転星は偏平になる．重力崩壊が進むにつれて，中心部の計量は，ほとんどブラックホールと変わらないようになる．ところで，取り残された部分はリング状であるが，これが中心部の作るブラックホールに落下して行く．図 4-17 で a) をモデル化すれば，b) のように最初から中心にブラックホールを置いて，それに落下するリングを考えればよいことになる．図 4-17-a，b はちょうど図 4-16-a, b に対応していることになる．

4-2-3　ブラックホールの準固有振動

図 4-16-a), b) でもう 1 つ大事なことがある．波形の後半は，減衰振動をしているが，これは，ブラックホールの準固有振動と呼ばれているものである．[Chandrasekhar and Detweiler 1975, Detweiler 1980, Leaver 1985, 1986] ここでは，定性的，直感的説明をしておく．式 (4-42) で $\tilde{T}_{\mu\nu} = 0$ を考える．これは，ブラックホール自身の摂動を考えること，あるいは，ブラックホール時空の中での線型重力波の伝播を考えることになる．ここでは，簡単のため重力波のかわりに massless スカラー場で考える．massless スカラー場 ϕ はミンコフスキー空間では，

$$\Box\phi = 0 \qquad (4\text{-}43)$$

であるので，ブラックホール時空では式 (4-38) の計量での $\Box$，すなわち

$$\phi^{;\mu}{}_{;\mu} = 0 \qquad (4\text{-}44)$$

となる．式 (4-44) は

$$\Big[-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Big(1-\frac{2M}{r}\Big)\,\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\,r^2\Big(1-\frac{2M}{r}\Big)\,\frac{\partial}{\partial r} + \Big(1-\frac{2M}{r}\Big)\,\Big(\frac{1}{r^2}\,\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\,\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Big)\Big]\,\phi = 0 \qquad (4\text{-}45)$$

と書けるが, いまスカラー場ϕをθ, φについては球面調和関数, 時間についてはフーリエ (Fourier) 分解すると

$$\phi = \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \sum_{l,m} Y_{lm}(\theta, \varphi)\ \frac{u_{lm}\ (r,\ \omega)}{r}\ \mathrm{d}\omega \tag{4-46}$$

とできる. 式 (4-46) を (4-45) に代入すると

$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\ u_{lm} \\ &+ \left[\omega^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3}\right)\ \right]\ u_{lm} = 0 \end{aligned} \tag{4-47}$$

となる. ここで, tortoise 座標r^*を

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r^*} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\ \ , \qquad r^* = r + 2M \ln\ \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \tag{4-48}$$

で定義すると 式 (4-47) は

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_{lm}}{\mathrm{d}r^{*2}} + [\omega^2 - V(r)]\ u_{lm} = 0 \tag{4-49}$$

$$V(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\ \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3}\right] \tag{4-50}$$

となってr^*をxと見なすと量子力学の 1 次元問題に似てくる. r^*座標では, $r^* \to -\infty$は$r = 2M$のため, 事象の地平線になっている. また, 外向きの光は$t - r^*$ =const, 内向きの光は$t + r^*$ =const に沿って進む. $V(r)$は$r^* \to \infty$では, $(r^*)^{-2}$で落ち, $r^* \to -\infty$ ($r = 2M$) では指数関数的にゼロとなるので, 図 4-18 のようなポテンシャルになる. 図 4-18 には, 準安定状態が存在し得る. 実際は, 散乱実験をすればよい. $r^* \to -\infty$はブラックホールの事象の地平線なので, ingoing wave だけであるが, $r^* \to \infty$では

$$u_{lm} = A_{\mathrm{in}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega r^*} + A_{\mathrm{out}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega r^*} \tag{4-51}$$

となる. ωを複素数と考えて$A_{\mathrm{in}}(\omega_{\mathrm{res}}) = 0$が, スカラー波に対するブラックホールの準固有振動になる. これは incoming wave がなくても存在するモードだからである. いま求めたいのは, 重力波に対してであるが, これには$h^{(1)}_{\mu\nu}$を 3-6 節で定義したテンソル調和関数で展開して議論をすればよい [レビューとして Chandrasekhar 1992]. シュヴァルツシルトブラックホールの場合は結局 (4-49) と似た

$$\frac{\mathrm{d}^2 X_{lm}}{\mathrm{d}r^{*2}} + (\omega^2 - V_{\mathrm{RW}}(r))\ X_{lm} = 0 \tag{4-52}$$

$$V_{\mathrm{RW}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\ \left(\frac{l\ (l+1)}{r^2} - \frac{6M}{r^3}\right) \tag{4-53}$$

となる. 式 (4-53) は Regge Wheeler ポテンシャル と呼ばれている. $l = 2$についてはブラックホールの準固有振動の最初の 2 つは [Chandrasekhar and Detweiler 1975]

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= (0.374 + 0.089\mathrm{i})\ M^{-1} \\ \omega_2 &= (0.348 + 0.274\mathrm{i})\ M^{-1} \end{aligned}\right\} \tag{4-54}$$

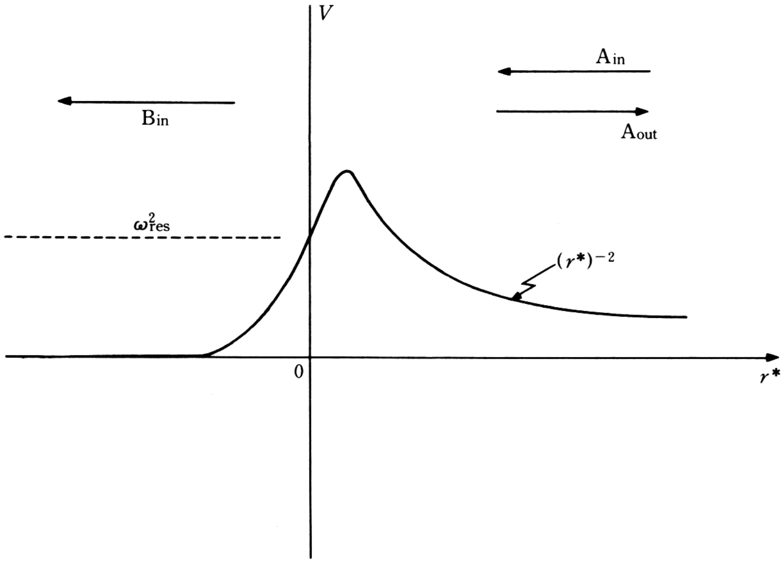


図 4-18　$l=2$ のポテンシャル $V(r)$ .r^* の単位は $\frac{GM}{c^2}$. $r^*=-\infty$ が $r=2M$ に対応する.

と求められている．虚数部分の大きい固有値がさらにいくつもあるが，それらについては Leaver [1985, 1986] に詳しい．そこで，図 4-16-a の後半の波形を

$$h_+ \sim \mathrm{Re}\ (A_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_1 t} + A_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_2 t}) \tag{4-55}$$

という形にして，A_1, A_2 を最小二乗法で決定したのが図 4-19 である．破線が式 (4-55) で準固有振動が卓越していることが明らかである．

式 (4-53) の場合ポテンシャルの最大は，$r=3.28M$ の所にある．事象の地平線は $r=2M$ の所にあることに注意するならば，準固有振動はまさにブラックホールの時空構造の反映である．逆に準固有振動数 ω_1, ω_2 を重力波の観測データから決定できれば，式 (4-54) よりブラックホールの質量がわかる．一般には，ブラックホールは回転しているカーブラックホールなので，準固有振動 ω_{res} は質量 M, 角運動量パラメータ q と $\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}$ の m に依存する [Detweiler 1980]. ω_{res} (M, q, m) を $l=2$ の場合，図 4-20 に示す．

m によって ω_{res} が変わること，また $q\to 1$ で $m=2$ は虚数部分が 0 になる．すなわちなかなか減衰しない．図 4-21 にシュヴァルツシルトブラックホール ($q=0$) とカーブラックホール ($q=0.99$) に角運動量ゼロの粒子が赤道面内で落下した時に発生する重力波を示す [Kojima and Nakamura 1983].

準固有振動が卓越しているのが明らかである．また，q が大きいほど減衰がゆっくりしていることに注意して欲しい．したがって図 4-21 のような準固有振動を見れば，ブラックホールの質量，角運動量等が決まるはずである．これは，いわば寺の鐘の音を聴けば，知恩院の鐘か妙心寺の鐘かわかるようなものである．鐘の音も減衰振動だからである．

ブラックホールが形成される時に発生する重力波で準固有振動が卓越することは，2 つのブラックホールが直線的に衝突する時にも確かめられている [Anninos et al. 1993]. 図 4-22 に放出さ

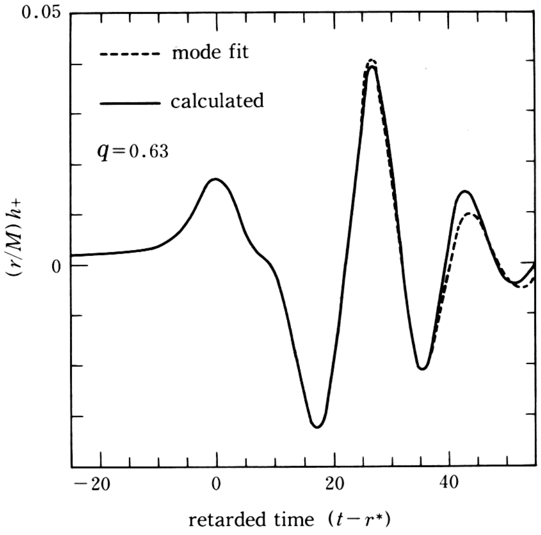


図 4-19　回転ブラックホールの形成時に放射される重力波の数値結果 (実線) と準固有振動によるモードフィット ($t-r^*>20$, 点線) [Stark 1989].

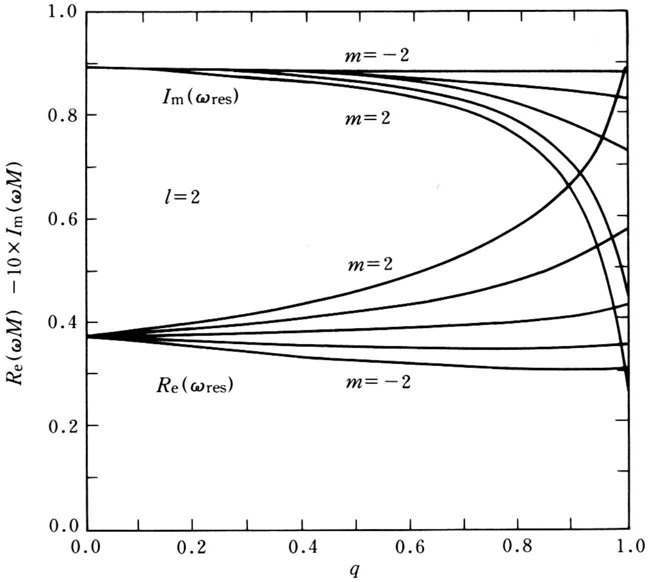


図 4-20　角運動量パラメータ $q(\leq 1)$ に対するカーブラックホールの準固有振動数 $\omega_{\rm res}$ [Detweiler 1980]. $q=1$ で $m=2$ に対して $I_{\rm m}(\omega_{\rm res})=0$ となっている.

れる重力波の波形を示すが, 図 4-21 の $q=0$ にそっくりなのがわかる.

つまり, 2 つのブラックホールが衝突するときも, ブラックホールに試験粒子が落下するときも重力波の波形は似ているのである. それどころか, 放出される重力波のエネルギーも回転しているブラックホールの形成と同様の議論ができる. 質量 m で角運動量ゼロの試験粒子がシュヴァルツシルトブラックホールに落下する時に放出される重力波の全エネルギーは [Davis et al. 1971]

$$E_{\rm GW}=0.0104\frac{m}{M}\,mc^2 \tag{4-56}$$

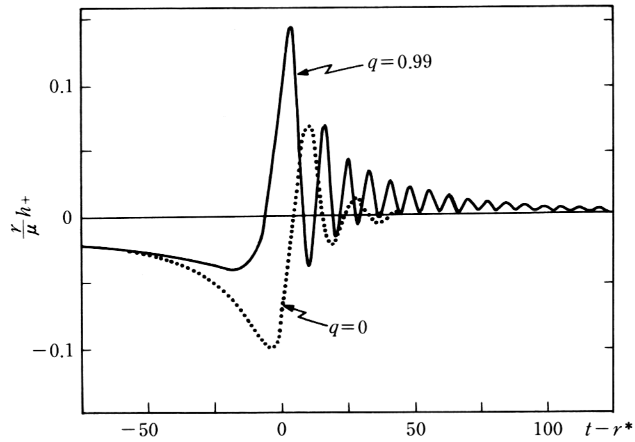


図 4-21　テスト粒子がブラックホールに落下するときに放射される重力波の波形 h_+. 破線は $q=0$ (シュヴァルツシルトブラックホール), 実線は $q=0.99$ のカーブラックホールの場合 [Kojima and Nakamura 1983].

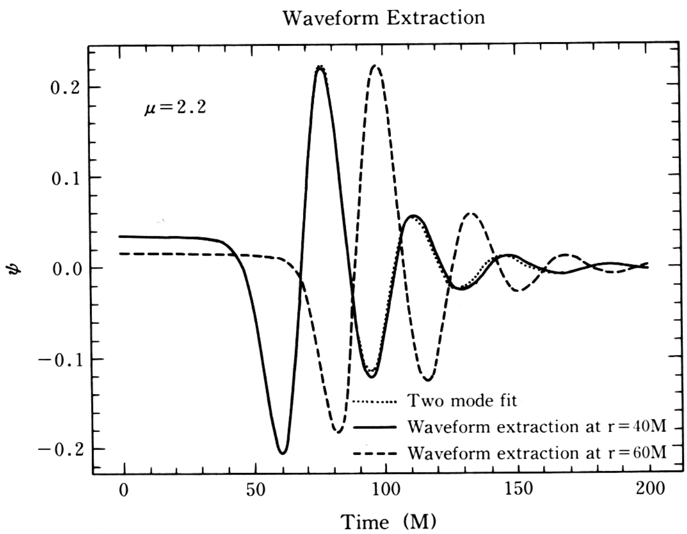


図 4-22　2 つのブラックホールが衝突する時に放出される重力波. 横軸は GM/c^3 単位の時間. $r=40GM/c^2$ と $60GM/c^2$ で, 重力波を数値データから引き出したときの波形が実線と破線で示されている. 点線は図 4-19 と同様なモードフィットである [Anninos et al. 1993].

となる. 回転ブラックホールの時と同様に $m=0.5M$ として 2 つのブラックホールの直接衝突に (4-56) を適用すると

$$E_{\rm GW}=2.6\times10^{-3}Mc^2 \tag{4-57}$$

となる. 図 4-23 には, 初期の 2 つのブラックホールの間隔の関数として放出された重力波のエネルギーを示している. (4-57) は無限遠から落下した場合なので, 有限の距離から落下した補正を入れると (4-57) は図 4-23 で点線となる. 有限の距離から衝突すると無限遠からに比べて, 1) 重力波を放出している時間が短くなる. 2) 衝突する速度が小さくなる. という 2 つの効果で重

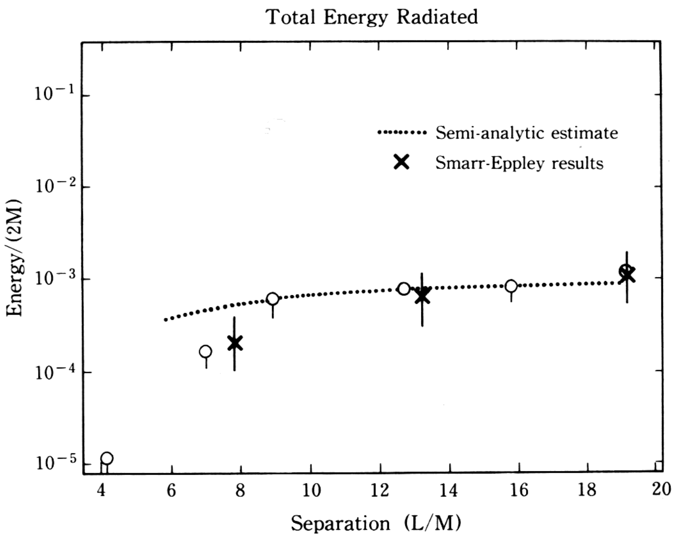


図 4-23　2 つのブラックホールの初期の位置と放出された重力波の全エネルギー．♀は数値結果を示す．ここでは片方のブラックホールの質量が M である．点線は有限の距離から落下した補正を入れた予想の式である．有限の距離から落下したときには，重力波を放出する時間が短くなると同時に，落下速度も小さくなる [Anninos et al. 1993].

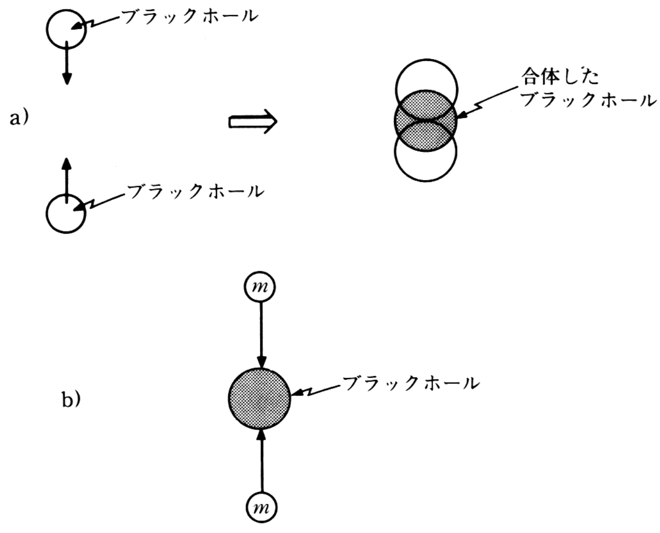


図 4-24　a) 2 つのブラックホールの直接衝突の直感的モデル．b) 2 つの試験粒子がブラックホールに落下する場合．a) を単純化すると b) になる．

力波のエネルギーが小さくなる．シミュレーションと補正を入れた図 4-23 の点線がよく合っているのがわかる．直感的には，回転ブラックホールの形成と同様に合体したブラックホールに残された部分が落下すると考えれば，もともと 1 つのブラックホールに 2 つの試験粒子が落下する場合と似てくるのは理解できるであろう．

準固有振動は，中性子星の場合にも存在する．もちろん，重力波とは結合しない動径方向の振動もあるが，Lindblom and Detweiler [1983] は，重力波と結合する中性子星の固有振動を Arnett

and Bowers [1983] の 13 種類の異なる状態方程式について計算した．周期 P は 0.3 ms から 1 ms で，減衰時間 τ は 0.1 ～ 10 s である．同じ質量の中性子星では，状態方程式がやわらかいほど，P と τ は小さい．というのは，やわらかい状態方程式ほど質量の中心集中度が大きくて密度が高い．したがってダイナミカルな時間スケールが短くなるため P は小さくなり，また高密度であるから速度が大きく相対論的効果も大きいので，重力波放出率が大きい．したがって τ は小さくなる．もし，中性子星の準固有振動がわかれば，状態方程式等中性子星の内部がわかるかも知れない．

4-3　パルサーと重力波

第 3 章で軸対称定常な系からは重力波は放出されないことを示した．しかし形成されたパルサー (＝中性子星) に地球のように山や谷があれば，非軸対称になりうる．中性子星の外側にはクラストと呼ばれる固体層がある [レビューとして Pines and Alper 1990]．また，中性子星の固体層でのプレートの運動が，地殻のプレートテクトニクスをほうふつとさせる形で論じられてすらいる [Ruderman 1991]．

つまり中性子星上にも地球と同じように山を考えることができる．最も高い山の高さ $h_{\max}$ は，その底面が溶けるかどうかで決まる [Carr and Rees 1979]．g, $E_{\rm liq}$, $E_{\rm b}$ そして A を重力加速度，固体の液化エネルギー，固体の結合エネルギー，固体を構成している原子の核子数として $h_{\max}$ は

$$h_{\max} \sim \frac{E_{\rm liq}}{Am_{\rm p}g} \sim \frac{0.1E_{\rm b}}{Am_{\rm p}g} \tag{4-58}$$

と与えられる．式 (4-58) を地球に適用すると $h_{\max} \sim 10{\rm km}$ となる．これはエベレスト山の高さを与える．同じ式を中性子星のクラストに適用すると

$$h_{\max} \sim 10^{-2}{\rm cm}\left(\frac{E_{\rm b}}{\rm keV}\right) \tag{4-59}$$

程度となる．式 (4-58) からは 1 つの山の質量が大きく見積もっても 10^6g 程度であることを示している．たくさん山があるとか，何らかの他の原因，例えば内部に強い磁場があるとかによって，パルサーが非軸対称な慣性モーメントを持っていたとしよう．z 軸を x^3 軸として，慣性主軸での慣性モーメントをそれぞれ I_1, I_2, I_3 としよう．いま，z 軸を回転軸として角速度 Ω で，この中性子星が回転していたとすると，慣性モーメントは

$$\begin{aligned}
I_{xx} &= \frac{(I_1 - I_2)}{2}\cos 2\Omega t + \frac{I_1 + I_2}{2} \\
I_{yy} &= -\frac{(I_1 - I_2)}{2}\cos 2\Omega t + \frac{I_1 + I_2}{2} \\
I_{xy} &= \frac{(I_1 - I_2)}{2}\sin 2\Omega + (I_1 - I_2) \\
I_{zz} &= I_3 = \text{一定} \\
I_{xz} &= I_{yz} = 0
\end{aligned} \tag{4-60}$$

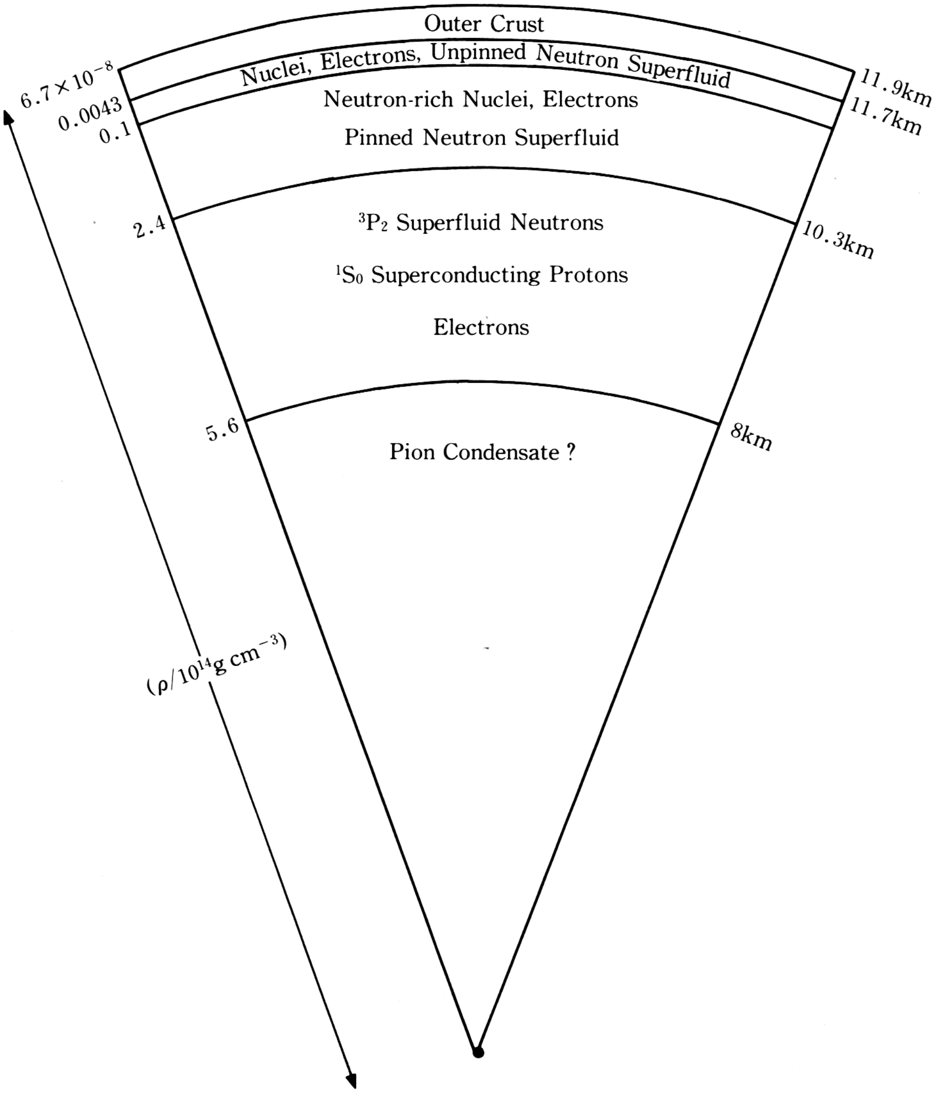


図 4-25　中性子星の内部構造 [Pines and Alpar 1990].

となる. 波形は 式 (4-60) を (3-54) と (3-56) に代入して

$$h_+ = -\frac{2G\Omega^2}{c^4 r}\,(I_1 - I_2)\,(\cos^2\theta + 1)\;\cos\;(2\Omega t - 2\varphi)$$

$$h_\times = -\frac{2G\Omega^2}{c^4 r}\,(I_1 - I_2)\,2\cos\theta\sin\;(2\Omega t - 2\varphi) \tag{4-61}$$

となる. ここで重力波の角振動数は 2Ω であることに注意しよう.

エネルギー放出率は 式 (4-60) を一般公式 (3-94) に代入して

$$L_{\mathrm{GW}} = \frac{32G}{5c^5}\,(I_1 - I_2)^2\Omega^6 \tag{4-62}$$

となる．いま考えている状況では $I_1 \sim I_2 \sim I_3$ なので，軸対称からのずれを表すパラメータ ϵ を

$$\epsilon = \frac{I_1 - I_2}{I_3} \tag{4-63}$$

で定義する．そうすると

$$L_{\rm GW} = \frac{32G}{5c^5}\ I_3^2 \Omega^6 \epsilon^2 \tag{4-64}$$

となる．ϵ の上限は，式 (4-64) が，観測されている中性子星の自転の減少率をすべて担うという場合である．式 (3-197) より，

$$L_{\rm GW} \leq -I_3 \Omega \dot{\Omega} \tag{4-65}$$

なので

$$\epsilon \leq 1.9 \times 10^{-4} \left(\frac{P}{10{\rm ms}}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\dot{P}}{10^{-12}{\rm ss}^{-1}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{I_3}{10^{45}{\rm cm}^2{\rm g}}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{4-66}$$

となる．カニ星雲のパルサーの場合 $P = 33{\rm ms}$, $\dot{P} = 4 \times 10^{-13}\ {\rm ss}^{-1}$ であるので，

$$\epsilon \leq 7.6 \times 10^{-4} \left(\frac{I_3}{10^{45}{\rm cm}^2{\rm g}}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{4-67}$$

よって，h の上限はカニ星雲までの距離を 2.3 kpc [理科年表] として

$$|h_+| \leq 6.5 \times 10^{-25}\ (\cos^2\theta + 1)\ |\cos(2\Omega t - 2\varphi)| \left(\frac{I_3}{10^{45}{\rm cm}^2{\rm g}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$|h_\times| \leq 6.5 \times 10^{-25}\ |2\cos\theta\ \sin\ (2\Omega t - 2\varphi)| \left(\frac{I_3}{10^{45}{\rm cm}^2{\rm g}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4-68}$$

となる．同様の評価は P, $\dot{P}$ と距離 r のわかっているパルサーすべてで可能となる．例えばミリ秒パルサー PSR1937+21 は $P = 1.6{\rm ms}, \dot{P} = 10^{-19}{\rm ss}^{-1}$ なので，$\epsilon < 3.8 \times 10^{-9} \left(I_3/10^{45}{\rm cm}^2{\rm g}\right)^{\frac{1}{2}}$ となる [Alper and Pines 1985].

さて，パルサーについては，式 (3-200) で示したように磁気双極放射によるエネルギー損失が第ゼロ近似としてはよいと考えられている．さて，磁気双極放射は Ω^4 に比例するが，$L_{\rm GW}$ は Ω^6 に比例する．パルサーが誕生した時は，Ω は現在より大きいはずであるから，初期には $L_{\rm GW}$ の方が磁気双極放射より重要である可能性はパルサーが発見されてすぐに指摘された [Gunn and Ostriker 1969, Ostriker and Gunn 1969]．これは，SN1987A の時にも再検討された [Piran and Nakamura 1988]．$L_{\rm GW}$ が電磁波によるエネルギー放射量 (式 (3-200)) より大きいためには

$$\frac{32G}{5c^5}\ I_3^2 \Omega^6 \epsilon^2 > \frac{2\Omega^4}{3c^3}\ B^2 R_{\rm NS}^6 \tag{4-69}$$

だから

$$\epsilon > 6 \times 10^{-6} \left(\frac{I_3}{10^{45}{\rm cm}^2{\rm g}}\right)^{-1} \left(\frac{B}{10^{12}G}\right) \left(\frac{R_{\rm NS}}{10{\rm km}}\right)^3 \left(\frac{P}{1{\rm ms}}\right) \tag{4-70}$$

となる．この場合，重力波放出によるパルサー自転の減衰時間 $\tau_{\rm GW}$ は ϵ が変化しないとして

$$L_{\rm GW} = -I_3 \Omega \frac{{\rm d}\Omega}{{\rm d}t} \tag{4-71}$$

を積分して得られる．すなわち誕生した時のパルサーの周期を P_0 として

$$P = P_0\left(1+\frac{4t}{\tau_{\rm GW}^0}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{4-72}$$

ここで，

$$\begin{aligned}\tau_{\rm GW}^0 &= \frac{5c^5P_0^4}{32(2\pi)^4GI_3\epsilon^2}\\ &= 3.65\times10^6{\rm s}\left(\frac{I_3}{10^{45}{\rm cm^2g}}\right)^{-1}\left(\frac{P_0}{1{\rm ms}}\right)^4\left(\frac{\epsilon}{10^{-4}}\right)^{-2}\end{aligned} \tag{4-73}$$

いま，第 5 章で説明されるような共振型検出器を用いるとする．重力波を受信する装置のバンド幅を $\Delta\nu$ とすると，パルサーからの重力波がこの $\Delta\nu$ の中に存在するのは，先ず時間としては $P=2/\nu$ の時であり，パルサーが誕生してから

$$\begin{aligned}t_{\rm obs} &= \frac{\tau_{\rm GW}^0}{4}\left(\left(\frac{P}{P_0}\right)^4-1\right)\\ &= \frac{\tau_{\rm GW}^0}{4}\left(\frac{P}{P_0}\right)^4\\ &= \frac{1}{4}\tau_{\rm GW}\end{aligned} \tag{4-74}$$

である．ここで $P\gtrsim P_0$ を仮定した．また，$\tau_{\rm GW}$ は 式 (4-73) で P_0 のかわりに $P=2/\nu$ を入れたものがその定義である．また $\Delta\nu$ のバンド幅に滞在する時間 $\Delta t_{\rm obs}$ は，

$$\Delta t_{\rm obs}\simeq\frac{2\pi\Delta\nu}{2\dot{\Omega}}\propto\epsilon^{-2} \tag{4-75}$$

一方，$h\propto\epsilon$ であるから，周期的な重力波源に対するシグナルノイズ比 $S/N\propto h\sqrt{\Delta t_{\rm obs}}$ は ϵ によらない．ε が大きいと h は大きいが $\Delta t_{\rm obs}$ が短い．反対に ϵ が小さいと h は小さいが $\Delta t_{\rm obs}$ が長い [Piran and Nakamura 1988] のがその理由である．

$I_1=I_2$ の時には，重力波は期待できないのであろうか．必ずしもそうではなく，もし自転角運動量 $\mathbf{J}$ の方向が z 軸と角 θ をなしていれば歳差運動によって重力波が放出される [Zimmermann and Szedenits 1979]．この場合放出される重力波は，角運動量ベクトル $\mathbf{J}$ と視線のなす角を i として

$$\begin{aligned}h_+ &= \frac{2I_1\Omega^2\epsilon\sin\theta}{r}\Big[(1+\cos^2 i)\ \sin\theta\cos2\Omega t\\ &\qquad +\cos i\sin i\cos\theta\cos\Omega t\Big],\\ h_\times &= \frac{2I_1\Omega^2\epsilon\sin\theta}{r}\Big[2\cos i\sin\theta\sin2\Omega t\\ &\qquad +\sin i\cos\theta\sin\Omega t\Big],\\ \epsilon &= (I_3-I_1)/I_1\ ,\qquad \Omega=J/I_1\end{aligned} \tag{4-76}$$

となる．Ω と 2Ω の両方の角振動数の重力波が存在することに注意しよう．

4-4 連星中性子星の合体と重力波

4-4-1 連星中性子星の合体率

表 4-1 今までに発見された連星中性子星

パルサー	P (ms)	$P/2\dot{P}$ (yr)	P_b (d)	e	d (kpc)
1913+16	59.0	1.1×10^8	0.323	0.62	7
1534+12	37.9	2.5×10^8	0.417	0.27	0.7
2124+11 C*	30.5	1.0×10^8	0.335	0.68	10
2303+46	1066.4	$3 \quad \times 10^8$	12.3	0.658	4

パルサー	m_p ($m_\odot$)	m_c ($m_\odot$)	$m_p + m_c$ ($m_\odot$)	$\tau_{\rm mrg}$ (yr)
1913+16	1.4411 (7)	1.3874 (7)	2.82843 (2)	$3 \quad \times 10^8$
1534+12	1.339 (3)	1.339 (3)	2.6781 (7)	2.7×10^9
2124+11 C*	1.349 (40)	1.363 (40)	2.712 (5)	2.2×10^8
2303+46	1.2 (3)	1.4 (2)	2.53 (8)	3.3×10^{12}

* 球状星団 M15 の中に存在

P: パルサーの自転周期 (ミリ秒単位)
$P/2\dot{P}$: パルサーが生まれてから今までの時間
P_b: 連星の公転周期 (日が単位)
e: 離心率
d: パルサーまでの距離 (kpc 単位)
m_p: パルサーの質量
m_c: 伴星の質量
$m_p + m_c$: 連星系の質量
$\tau_{\rm mrg}$: 重力波放出による合体までの時間

ハルスとテイラーが発見した PSR1913+16 は, 1 年間に約 76μs ずつ周期が短くなっており, 式 (3-151) によると今から 3×10^8 年後に合体する. その時には h_+ と $h_\times$ は式 (4-1) よりずっと大きな振幅を持つはずであるので, 強い重力波源となることが期待される. しかし, 我々は 3 億年も待つわけにはいかない. そこで, まず我々の銀河の中で PSR1913+16 のような連星中性子星はいくつ存在しているかというと表 4-1 の 4 つである [Phinney and Kulkarni 1994]. 4 つのうち 3 つは宇宙年齢 ($\sim 10^{10}$ 年) 内に合体するが, PSR2303+46 はそうではない. このデータをもとにまず i 番目の連星パルサーが生まれてから合体するまでの時間 τ は現在までの時間 $P/2\dot{P}$ と今から合体するまでの時間の和だから

$$\tau = \frac{P}{2\dot{P}} + \tau_{\rm mrg} \tag{4-77}$$

となる. さて, 遠くて電波の弱いパルサーは見つけられないから i 番目のパルサーがどのぐらい遠くても見つかっているはずであるという距離が決まる. つまり j というパルサーサーチで見つかっているはずの体積 $V_{j,\max}(i)$ が決まる. $V_{\max}(i) = \sum_j V_{j,\max}(i)$ とすると我々の銀河の体積を $V_{\rm gal}$ として, 我々の銀河中での連星中性子星の合体率 $R({\rm yr}^{-1})$ は

$$R = \sum_i \frac{V_{\rm gal}}{V_{\max}(i)\tau(i)} \tag{4-78}$$

となる. 式 (4-78) を評価するためには, 連星中性子星がどう分布しているかを仮定する必要があるが, ここでは簡単のため, 銀河中の半径 12 kpc, z 方向に 1 kpc のシリンダー内に一様に分布して

いるとする [Phinney 1991]. こうすると $V_{\rm gal} = 900{\rm kpc}^3$ となる. また $V_{\max}$ (PSR1534+12)=0.3 ${\rm kpc}^3$ であり $V_{\max}$ (PSR1913+16) $= 20\ {\rm kpc}^3$ である. 表 4-1 から決まる $\tau(i)$ を (4-78) に代入すると

$$R = 10^{-6}{\rm yr}^{-1} + 10^{-7}{\rm yr}^{-1} \tag{4-79}$$

となる. 右辺第 1 項が PSR1534+12 からの寄与であり, うしろが PSR1913+16 からである. (1-17) で銀河の密度を与えたから, 宇宙で連星中性子星の合体率 r は平均的に

$$r = 10^{-2}R{\rm Mpc}^{-3} \tag{4-80}$$

であると推定できる. PSR2127+11C は球状星団 M15 中にあるが, M15 のような球状星団は宇宙に平均的に $\sim 0.1{\rm Mpc}^{-3}$ 密度で存在すると見積もられるので [Phinney 1991]

$$r\ ({\rm PSR2127+11C}) = 3\times 10^{-10}{\rm Mpc}^{-3}{\rm yr}^{-1} \tag{4-81}$$

と評価される. 以上をもとに, もっとも悲観的な評価をする. 1) PSR1534+12 と PSR1913+16 のような連星中性子星はそんなに多くなくて 10%の確率でたまたま見つかったとする. 2) PSR2127+11C は球状星団中にあるが我々の銀河の中で他に同様なものはない. 3) パルサーのビーム効果は効かない. すなわちすべてのパルサーは, 電波の強さだけで観測可能かどうかがきまるとする. こうすると式 (4-80) は 1 桁へり, 式 (4-81) を考えても

$$r \sim 10^{-9}{\rm Mpc}^{-3}{\rm yr}^{-1} \tag{4-82}$$

となる. これは, われわれから 1 Gpc 内で年間 2 ∼ 3 イベントという割合になる. 次にもっともらしい評価をすると 1) PSR1534+12 と PSR1913+16 は典型的な連星パルサーである. 2) パルサーのビームがこちらを向いていないため観測されないパルサーを考えると, r に 3 倍かける必要があるとする. 3) パルサーの形成率は銀河の中心に行く方が盛んなので, r に 2 倍かける. このようにすると

$$r \sim 6\times 10^{-8}{\rm Mpc}^{-3}{\rm yr}^{-1} \tag{4-83}$$

これは我々から 200 Mpc 内で年間 2 ∼ 3 イベントという率を与える. Narayan, Piran and Shemi [1994] も同様の解析をして同様な結論を得ている. さらにブラックホール候補の X 線星の存在も考えると [McClintock 1992], ブラックホールと中性子星の連星系の合体もありうることを彼らは指摘している.

さて, PSR1913+16 のような連星パルサーはどのようにしてできるのであろうか. 図 4-26 のようにもともと 2 つの大質量星 ($M > 13M_\odot$) の連星系を考える. まず, 質量の大きい方が式 (1-14) からわかるように先に進化して赤色巨星になるが, 赤色巨星は質量の大半を失うか, もともと軽い方の星に質量の大半を取られ (第 1 回目の質量交換) それ自身は超新星爆発を起こして中性子星と大質量星の連星ができる. このフェーズは X 線星として見える. 次にもう一方の大質量星が進化して赤色巨星になるが, この時中性子星は共通の水素層の中に入る (コモンエンベロープ). ここで中性子星と大質量星の中心核は近づくとともに水素の外層を失いヘリウム星になる.

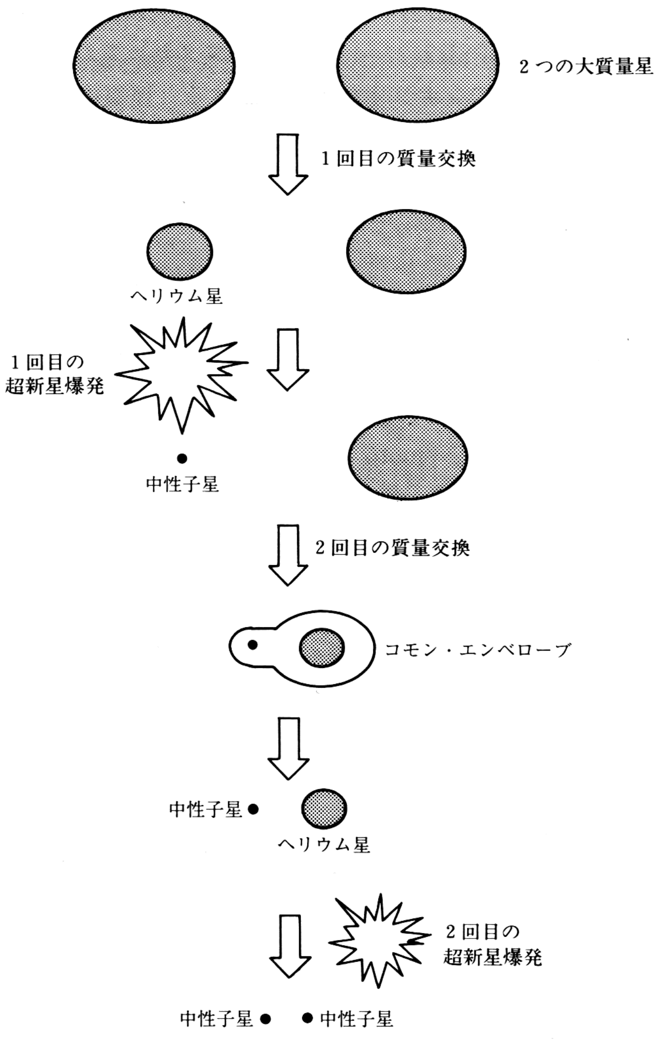


図 4-26　中性子星連星の形成シナリオ [山岡均・茂山俊和 1992].

ここで2回目の超新星爆発が起こって楕円軌道の連星中性子星が形成されるというものである [Flannary and Van den Heunel 1975, Smarr and Blandford 1976, Burrows and Woosley 1986]. どうしてこんなに一見複雑なプロセスが必要かというと超新星爆発で連星系の質量の半分以上が失われると連星が解体するというのがポイントである (束縛状態でなくなる).

しかし, PSR1913+16 とほとんど双子のような PSR2127+11C は球状星団 M15 の中にあるので図 4-26 のようなシナリオは PSR2127+11C の場合には成立しない. というのは球状星団の年齢は 140 億年以上と見積もられており [Demmarque et al 1991], 大質量星はすべて進化を終了して中性子星とかブラックホールになっているからである. 現在球状星団中で星は形成されていないから, 球状星団の中心の密度の高い所で, 例えば中性子星と白色矮星の連星にもう1つ別の中性子星が非弾性衝突をして, 白色矮星を外にだして中性子星の連星ができるというのが1つの可能性である. つまり3体衝突を使う. この時中性子星の連星系は大きな反跳速度を得る. この

シナリオを支持するものとして, PSR2127+11C は M15 の中心にはないという事実がある.

PSR1534+12, PSR1913+16 と PSR2127+11C とは形成メカニズムが違っているかもしれない. しかし, 前者に対する図 4-26 のシナリオが正しいとすると連星中性子星の合体率の最大値は次のようにしてわかる. 超新星爆発は 2 回起きるが, どちらの超新星爆発も水素の外層がないため Type II ではなく Type Ib または Type Ic である. したがってすべての Type Ib と Ic の超新星が連星中性子星を作るというのが連星中性子星の形成率の最大値を与える. Phinney [1991] によるとそれは

$$r \sim 6 \times 10^{-5}\mathrm{Mpc}^{-3}\mathrm{yr}^{-1} \tag{4-84}$$

となり, 形成率=合体率という定常状態を考えると ~ 20Mpc 内で年に 2 ~ 3 イベントとなる. 式 (4-84) の率は式 (4-83) より 10^3 倍も大きいから非現実的と思うかも知れないがそうとは限らない. Yamaoka, Shigeyama and Nomoto [1993] によると図 4-26 で, ヘリウム星の質量が $\sim 5M_\odot$ 以下だとヘリウム星の中に中性子星が入り込んでヘリウム層がはぎとられ, 中性子星と炭素酸素星 (C+O 星) の連星になる. C+O 星が超新星爆発 (Type Ic) して連星中性子星ができるが, この時の連星の間隔は PSR1913+16 よりもっと小さくなる. 例えば $a \sim 0.2R_\odot$ の場合, PSR1913+16 と同じ離心率とすると $\tau_{\mathrm{mrg}} = 6.4 \times 10^5\mathrm{y}$ となる. そうすると, このような連星中性子星は PSR1913+16 より 10^3 倍くらい短い寿命しかないので見つかりにくい. 実際 SN1994I は上のような C+O 星が超新星爆発したものである可能性がある [Nomoto et al 1994]. したがって式 (4-84) が実現されているかもれない.

さて, 式 (4-83) の合体率を出すのにはパルサーまでの距離が必要になってくる. パルサーまでの距離はどうして出すかというと DM (Dispersion Measure) という量を使う. DM は電波が星間にある電子の効果で振動数によって位相速度が異なることを利用して決定される. DM の定義は [Lang 1980] n_e を電子密度として

$$DM = \int_o^d n_\mathrm{e} \mathrm{d}\ell \tag{4-85}$$

ここで d はパルサーまでの距離で積分は視線方向に沿って行う. そこで視線方向の n_e の平均がわかれば (4-85) より

$$d = \frac{DM}{< n_\mathrm{e} >} \tag{4-86}$$

としてパルサーまでの距離がわかる [Lang 1980]. さて, $< n_\mathrm{e} >$ であるが, Phinney [1991] の論文の後, Taylor and Cordes [1993] による詳しい解析の結果, 今まで考えられていたのに較べて, n_e は半分近く小さくなることがわかった. これは距離が他の方法でわかっている 74 個のパルサーや, 223 個の距離のわかっている電波源をもとにしてわかったことである. n_e が半分になると d は 2 倍になる. そうすると式 (4-78) の $V_{\max}(i)$ は 8 倍になり R は 1/8 になる. すると式 (4-83) も 1/8 になる. つまり, 我々から 400 Mpc 内で年間 2 ~ 3 イベントとなる. これはある意味で重要である. 距離が倍になると重力波の振幅は 1/2 になるからである.

以上連星中性子星の合体率についていろいろ議論して来たが, r の値が確立したという状況ではない. 20 Mpc ~ 1 Gpc の距離内で年に 2 ~ 3 イベントと考えておくのがよいと思われる. Phinney [1991] の論文の 1 つのポイントはいくら少なくても宇宙の果てまで考えれば (~ 1 Gpc)1 年間に 1 イベント程度あるということであった.

4-4-2　最後の 3 分間

PSR1913+16 の現在の離心率は大きいが, 式 (3-148) より軌道長半径の 19/12 乗に比例して離心率は小さくなる. したがって, $a \sim 500$ km になると PSR1913+16 の場合 $e \sim 10^{-4}$ となり, ほとんど円である. そうすると軌道が円の時には, 軌道長半径 a と合体までの時間 t_c の関係は式 (3-150) で与えられるが, t_c が 3 分になるのは a が約 470 km の時である. すなわち

$$t_\mathrm{c} = 3\mathrm{min}\left(\frac{m_1}{1.4M_\odot}\right)^{-1}\left(\frac{m_2}{1.4M_\odot}\right)^{-1}\left(\frac{m_1+m_2}{2.8M_\odot}\right)^{-1}\left(\frac{a}{470\mathrm{km}}\right)^{4} \tag{4-87}$$

この時放出されている重力波の振動数 f はケプラー振動数の 2 倍だから,

$$f = 2\frac{1}{P_\mathrm{b}} = 19\mathrm{Hz}\left(\frac{m_1+m_2}{2.8M_\odot}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{470\mathrm{km}}\right)^{-\frac{3}{2}} \tag{4-88}$$

となる. このあと連星は N 回転するとすると式 (3-141) で $e=0$ とおいた式を使って, N は

$$\begin{aligned} N &= \int \frac{1}{P_\mathrm{b}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}a}{P_\mathrm{b}\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}} = \frac{(m_1+m_2)^2}{64\pi m_1 m_2}\left(\frac{c^2 a}{G(m_1+m_2)}\right)^{\frac{5}{2}} \\ &= 2635\left(\frac{m_1}{1.4M_\odot}\right)^{-1}\left(\frac{m_2}{1.4M_\odot}\right)^{-1}\left(\frac{m_1+m_2}{2.8M_\odot}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{4.7\times10^{7}\mathrm{cm}}\right)^{\frac{5}{2}} \end{aligned} \tag{4-89}$$

で与えられる. また重力波の振幅は式 (3-84) と (3-85) で与えられるが, a をケプラーの法則 (3-80) で書き換えて, r と ϕ は一定の観測者を考え, また位相因子を適当にとると

$$h_+ = 2\frac{G^{\frac{5}{3}}}{rc^4}\,\frac{m_1 m_2}{m_t^{\frac{1}{3}}}\,(\pi f)^{\frac{2}{3}}\cos(2\pi f t)(\cos^2 i + 1) \tag{4-90}$$

$$h_\times = 2\frac{G^{\frac{5}{3}}}{rc^4}\frac{m_1 m_2}{m_t^{\frac{1}{3}}}(\pi f)^{\frac{2}{3}}\sin(2\pi f t)2\cos i \tag{4-91}$$

となる. ここで f は重力波の振動数, また i は式 (3-84) と (3-85) では θ と書いていたが今の場合, 視線方向, すなわち重力波源から観測者への方向と軌道の角運動量の方向のなす角である. 重力波の振動数の変化は, 式 (3-143) で, $P_\mathrm{b} = 2f^{-1}$, $e=0$ として

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{96\pi^{\frac{8}{3}}}{5}\frac{G^{\frac{5}{3}}}{c^5}f^{\frac{11}{3}}m_1 m_2 m_\mathrm{t}^{-\frac{1}{3}} \tag{4-92}$$

となる. さて, 連星中性子星の最後の 3 分間の重力波が検出されれば何がわかるかを, 以上の式をもとに議論してみよう [Cutler et al. 1993]. まず式 (4-89) より ~2500 回転もするのだから, ある時点での重力波の振動数 f とその振動数の変化の割合 $\dot{f}$ は決められる (図 4-27). そうすると式 (4-92) より $\dot{f}/f^{\frac{11}{3}}$ は, c と G という物理定数以外は $m_1\ m_2\ /m_\mathrm{t}^{\frac{1}{3}}$ という両星の質量の組合せになる. これは普通 chirp mass と呼ばれる. すなわち

$$M_\mathrm{chirp} = (m_1 m_2)^{\frac{3}{5}}\ m_\mathrm{t}^{-\frac{1}{5}} \tag{4-94}$$

式 (4-92) は M_chirp が観測から決まることを意味する. 次に h_+ と $h_\times$ の振幅の比は i のみによっているから h_+ と $h_\times$ の比から i が決まる. i と M_chirp さらに h_+ (式 (4-90)) または $h_\times$ (式

(4-91)) を用いると源までの距離 r が決まることになる [Schutz 1986]. この距離の決定法は, 天文学的な距離の決定法 [Van den Bergh 1992, Jacoby et al. 1992] とは全く異なる物理的な方法である. 天文学では 10 Mpc 以上の距離を測るのには, Tully-Fisher 関係, Planetary Nebula 光度関数, Surface Brightness Fluctuation, $\mathrm{I_a}$ 型超新星の光度とかいった何らかの経験則または, それに近いものを用いている. もちろん, これらの整合性は議論されている [Fukugita, Hogan and Peebles 1993]. しかし, 別の距離の決定法は天文学的な距離の決定法とは独立なので重要である.

さて, 遠くの例えば 100 Mpc までの銀河の距離 d がわかるとその銀河の後退速度 v との比が, 宇宙論で重要なハッブルパラメータ H_0

$$H_0 = \frac{v}{d} \tag{4-95}$$

を与える. H_0 の値は, 宇宙論にとって基本的なパラメータであるが, 観測的には 2 倍程度の不定性を持っていた [Fukugita, Hogan and Peebles 1993]. 最近ハッブル宇宙望遠鏡を用いた Virgo 銀河団の変光星の観測からは [Freedman et al. 1994, Peirch et al. 1994] $H_0 = 80 \pm 17\mathrm{km\ s^{-1}}$ が有力視されてきている. この H_0 がもし本当だとすると宇宙の年齢は 120 億年以下となり, 球状星団の年齢の下限 140 億年 [Demarque, Peliyannis and Sarajedini 1991] より少ない. これは, 明らかな矛盾であり, 宇宙定数を含めたいくつかの可能性が指摘されているが, 宇宙像を変えるかもしれない重大事である. このような観点からも, 連星中性子星の合体時の最後の 3 分間の重力波を観測して, 距離を全く独立な物理的方法で決めることは極めて重要であり, 他の宇宙論のパラメータの決定可能性も含めて多くの議論がなされている [Schutz 1986, 1989, Chernoff and Finn 1993, Finn 1992, Finn and Chernoff 1993, Finn 1994, Markovic 1993].

式 (4-90) と (4-91) の重力波の振幅は, f を 20 Hz 単位で測って, r を 200 Mpc 単位で測ると

$$h_+ = 6.4 \times 10^{-24} \left(\frac{r}{200\mathrm{Mpc}}\right)^{-1} \left(\frac{M_{\mathrm{chirp}}}{1.2M_\odot}\right)^{\frac{5}{3}} \left(\frac{f}{20\mathrm{Hz}}\right)^{\frac{2}{3}} \cos\ (2\pi f t)\ \frac{\cos^2\ i+1}{2} \tag{4-96}$$

$$h_\times = 6.4 \times 10^{-24} \left(\frac{r}{200\mathrm{Mpc}}\right)^{-1} \left(\frac{M_{\mathrm{chirp}}}{1.4M_\odot}\right)^{\frac{5}{3}} \left(\frac{f}{20\mathrm{Hz}}\right)^{\frac{2}{3}} \sin\ (2\pi f t)\ \cos\ i \tag{4-97}$$

となる. ここで, Thorne [1987] によるアイデアは, 連星中性子星がほとんど準周期的に運動するならば, SN 比 (S/N: Signal Noise 比) は式 (4-89) で決まる N と式 (4-96) の重力波の振幅 h を用いて

$$S/N = \frac{h_{\mathrm{c}}}{h_{\mathrm{rms}}}\ , \tag{4-98}$$

$$h_{\mathrm{c}} = h\sqrt{N} \tag{4-99}$$

で決まるという事実を使う (5-3-2 参照). h_{c} を重力波の特性振幅 (Characteristic Amplitude) と呼ぶ. h_{rms} は検出器の 2 乗平均雑音 (rootmean square noise) である. この辺の事情は第 5 章以降で詳しく述べられるが, 検出器に入ってくるシグナル $S(t)$ は, 重力波の信号 $h(t)$ と検出器のノイズ $n(t)$ の和である.

$$S(t) = h(t) + n(t) \tag{4-100}$$

このシグナルから $h(t)$ の重力波の情報をいかにして取り出すかであるが, シグナルに対して理論的な予想があれば, Wiener の optimal filter をシグナルにかけることにより S/N 比を式 (4-98) のように増やすことができる. 直感的には, ノイズはランダムゆえ, 長時間積分すれば, 重力波の方が見えてくるということである.

さて, 式 (4-99) の h_c は式 (4-89) を使うと

$$h_c \sim 3.2 \times 10^{-22} \left(\frac{M_{\rm chirp}}{1.2M_\odot}\right)^{\frac{5}{6}} \left(\frac{f}{20{\rm Hz}}\right)^{-\frac{1}{6}} \left(\frac{r}{200{\rm Mpc}}\right)^{-1} \times \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(\cos^2 i + 1) \\ \cos i \end{Bmatrix} \tag{4-101}$$

となる. LIGO 等のキロメートルクラスのレーザー干渉計は式 (4-101) の重力波を検出することを大きな目標としている.

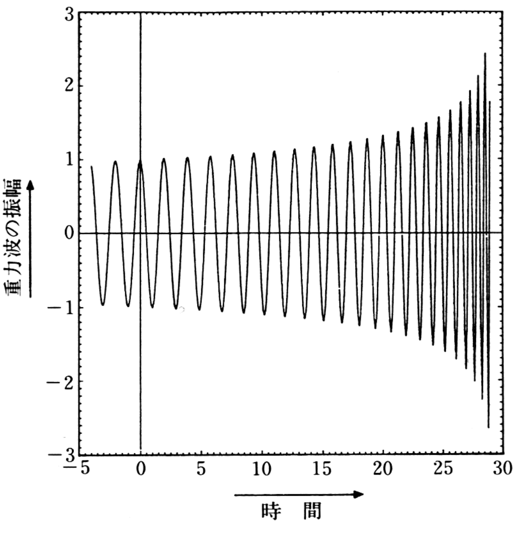


図 4-27 連星中性子星が合体するときの重力波の概念図. 振幅が増すと共に振動数も増大する. これを chirp シグナルと呼ぶ. $\nu \sim 20$ Hz からこのような波形が約 3 分続くので最後の 3 分間と呼ばれている.

さて, 理論的な予想波形はいくつかのパラメータを持っているが, これはテンプレートと呼ばれる. 理論的に問題となって来ているのは, いかに正確なテンプレートを作るかという点である. 式 (4-92) でわかったが, 四重極放射の範囲では $M_{\rm chirp}$ しか決まらない. $a \sim 500$ km の時, 両星の公転速度 $v_{\rm rot}$ はケプラーの法則 (3-80) より $1.5 \times 10^9 {\rm cm\ s^{-1}}$ 程度であるから $v_{\rm rot}/c \sim 0.05 \ll 1$ となって式 (3-26) の遅延展開はよさそうである. そこで, 四重極波の次のオーダーを考える. これを最初に計算したのは Wagoner and Will [1976] であった. 彼らは式 (3-26) で, $m = 2$ までの計算を行った. その結果換算質量を $\mu\ (= m_1 m_2/m_{\rm t})$, 両星の距離を a として

$$L_{\rm GW} = L_{\text{四重極}} \left[1 - \frac{Gm_{\rm t}}{c^2 a}\left(\frac{2927}{336} + \frac{5}{4}\eta\right)\right], \quad \eta = \frac{\mu}{m_{\rm t}} \tag{4-102}$$

を得た.

ここで, $L_{\text{四重極}}$ は式 (3-139) で $e=0$ としたものであり

$$L_{\text{四重極}} = \frac{32}{5}\ \frac{G^4}{c^5}\ \frac{\mu^2 m_{\rm t}^3}{a^5} \tag{4-103}$$

である. 式 (4-102) は一般に $v=\sqrt{Gm_{\rm t}/a}$ として

$$L_{\rm GW} = L_{\text{四重極}} \sum_{n=0}^{\infty}\ a_n\ \left(\frac{v}{c}\right)^n \tag{4-104}$$

のように展開できることを示している. そして式 (4-102) の段階では

$$a_0 = 1\ ,\quad a_1 = 0\ ,\quad a_2 = \frac{2927}{336} + \frac{5}{4}\,\eta \tag{4-105}$$

である. a_3 は 1993 年に Wiseman [1993] によって, Epstein and Wagoner [1975] とは異なる Blanchet and Damour [1992] によるポストニュートン展開法で求められた. その結果

$$a_3 = 4\pi \tag{4-106}$$

であることがわかった.

さて, a_3 までの項を入れて, 式 (4-92) を考えてみると今度は $\dot{f}$ は $M_{\rm chirp}$ 以外にも η に依存して

$$\frac{{\rm d}f}{{\rm d}t} = \frac{96\pi^{\frac{8}{3}}}{5}\ \frac{G^{\frac{5}{3}}}{c^5}\ f^{\frac{11}{3}}\ (M_{\rm chirp})^{\frac{5}{3}} \\ \left[1-\left(\frac{Gm_{\rm t}}{c^3}\ \pi f\right)^{\frac{2}{3}}\ \left(\frac{743}{335}+\frac{11}{4}\eta\right) - \left(\frac{Gm_{\rm t}\pi f}{c^3}\right)\ 4\pi\right] \tag{4-107}$$

となる . もし, 式 (4-107) の $\dot{f}$ で a_4 以上の高次項が無視できるとすると, 式 (4-98) の意味で SN 比 10 の重力波に対して, $m_1 \sim 1.4M_\odot$, $m_2 \sim 1.4M_\odot$ の時, $M_{\rm chirp}$ は 0.034%の誤差で, また μ は 6%程度の誤差で決定できる. 距離 r についても, 15%程度で決定できる可能性が示されている [Cutler and Flanagan 1994]. しかし, 問題なのは式 (4-104) のポストニュートン展開の収束性である. 式 (4-89) で四重極放射によって円軌道の半径が少しずつ小さくなるとして, 合体まで何回 回転するかを計算した. 式 (4-89) で N は $a^{2.5}$ に比例するから, 何回転するかはほとんど最初の a で決まっている. 重力波によるエネルギー放出率が変わると, 当然 N も変わる. これを ΔN とすると

$$\Delta N \sim N\ \cdot\ \frac{\Delta L_{\rm GW}}{L_{\rm GW}} \tag{4-108}$$

が成立する. そうすると, いま考えている場合式 (4-104) の $a_n(v/c)^n$ からの寄与 $(\Delta N)_n$ は

$$(\Delta N)_n\ \ \sim N\ \ a_n\ \left(\frac{v}{c}\right)^n \\ \sim 2500 \times (0.1)^n\ a_n \tag{4-109}$$

となる. 式 (4-105) と (4-106) より

$$(\Delta N)_2 \sim 217\ \ ,\qquad (\Delta N)_3 \sim 30 \tag{4-110}$$

となる．まだまだ N は収束していない．ということは，次の a_4 の効果を入れると現実の重力波の位相と，理論的な位相の予想は，理論の方のテンプレートの不備のため全く違ったものとなるので，精度よく $M_{\rm chirp}$ や μ の決定が期待できないことになる．そこで $(\Delta N)_n \ll 1$ となる n はいくらかを調べることが，理論的には観測と関係して重要視されるようになった．

この問題に対して，Cutler et al. [1993] は片方の質量がもう一方より大きい場合を考えた．つまり，$m_1 \gg m_2$ とすると質量 m_1 のシュヴァルツシルトブラックホールのまわりを小さい試験粒子 m_2 がまわっているとしてよい．遠方での重力場は，球対称なら中心の質量が中性子星でもブラックホールでも同じだということがポイントである．そうするとシュヴァルツシルトブラックホールの摂動の式 (4-52) の右辺に $m_2(=\mu)$ に比例した試験粒子による重力波の源を付け加えることになる (式 (4-42))．詳しくは Cutler et al. [1993] あるいは Nakamura, Oohara and Kojima [1987] を見て欲しいが，とにかく

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^{*2}} + \left(\omega^2 - V_{\rm RW}(r)\ \right)\right) X_{lm} = \mu\ S_{lm}\ (\omega,\ r) \tag{4-111}$$

といったタイプの式を解くことになる．Cutler 達は式 (4-111) を数値的に解いた．その結果 $\mu \to 0$ 極限で

$$a_4 \sim -4.89\ , \quad a_5 = -38\ , \quad a_6 \simeq 135 \tag{4-112}$$

という値を得た．Tagoshi and Nakamura [1994] は，Cutler et al. [1993] と同じ問題に対して解を $u \equiv 1 - 2m_t/r$ のべき級数で展開し，得られた解析的結果に対して最小二乗法で a_4 より先の係数を決めた．その結果 $n = 6$ と 8 に式 (4-104) とは異なる対数項を発見した．Tagoshi and Sasaki [1994] は Tagoshi and Nakamura [1994] の結果を解析的に導き出した．得られた公式は

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = L_{\text{四重極}} \times \ \Big[1 &- \frac{1247}{336}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + 4\pi\left(\frac{v}{c}\right)^3 \\ &-4.928461199295258\left(\frac{v}{c}\right)^4 - 38.29283545329089\left(\frac{v}{c}\right)^5 \\ &+115.73172132\left(\frac{v}{c}\right)^6 - 16.304761151\left(\frac{v}{c}\right)^6 \log\left(\frac{v}{c}\right) \\ &-101.509987\left(\frac{v}{c}\right)^7 - 117.787\left(\frac{v}{c}\right)^8 + 52.69901\left(\frac{v}{c}\right)^8 \\ &\times\log\left(\frac{v}{c}\right) + 700.45\left(\frac{v}{c}\right)^9 - 209.78\left(\frac{v}{c}\right)^9 \log\left(\frac{v}{c}\right)\Big]\end{aligned} \tag{4-113}$$

である．式 (4-113) をもとにして式 (4-109) を使って，$(v/c) \sim 0.1$, $N = 2500$ の場合，$(\Delta N)_n$ を評価してみると

$$\begin{aligned}&(\Delta N)_4 \ \sim\ 1.25\ , \quad (\Delta N)_5 \ \sim\ 0.95\ , \quad (\Delta N)_6 \ \sim\ 0.28 \\ &(\Delta N)_7 \ \sim\ 0.025\ , \quad (\Delta N)_8 \ \sim\ 0.003\end{aligned} \tag{4-114}$$

となる．これより $m_1 \sim m_2$ の場合 $n \sim 7$ までの公式が必要と推測できる．これを受けて，Blanchet et al. [1995] が $m_1 \sim m_2$ の時

$$a_4 = -\frac{44711}{9072} + \frac{380}{9}\,\eta \tag{4-115}$$

であることを示した．式 (4-115) で $\mu \to 0$ にすると $\eta = 0$ だから，式 (4-113) の a_4 に一致する．a_5, a_6 とさらに高次の項を理論的に求めて，観測された重力波から m_1, m_2 の値を決めることが大きな問題になっている．

重力波の波形に与えるパルサーの自転の効果については，PSR1913+16 のような連星パルサーが合体する場合は，自転速度は大きくないので考えなくてよいが，一般には考える必要がある [Blanchet et al. 1995]．スピン–軌道，スピン–スピン相互作用の効果は a_3 と a_4 に入ってくる [Kidder, Will and Wiseman 1993]．また，一般に軌道角運動量が，全角運動量のまわりに歳差運動を起こす．その結果，波形が変調を受ける [Cutler et al. 1993a]．したがって中性子星やブラックホールの質量だけでなく，スピンも決まる可能性がある [Cutler and Flanagan 1994]．このようなスピン–軌道相互作用については，ブラックホールのまわりの摂動でも精力的に調べられている [Shibata 1993, Shibata 1994, Shibata, Sasaki, Tagoshi and Tanaka 1995]．

以上，中性子星の連星や中性子星-ブラックホール連星の合体前の重力波を観測することによって，質量 (m_i)，スピン (s_i)，軌道傾斜角度 (i)，距離 (r) といった量が決定できる可能性がでてきた．これらは基本的には波形のテンプレートの中に m_i, s_i, i, r といった量がパラメータと入っているので，それと観測された波形の比較から決まるわけである．そうすると逆に波形のパラメータの中に他のものが入っていてもよい．例えば，2-6 節と 3-5 節で，アインシュタインによる一般相対性理論は，0.1%の精度で観測事実と合っていることを示した．しかし，これは 0.1%程度で，違うかもしれないという可能性は否定していない．もし，0.1%違えば，式 (4-113) の公式の a_n のどこかにその効果が表れるかもしれないのである．例えば，Will [1994] は第 8 章で説明のあるブランス-ディッケ理論に例を取って，ブランス-ディッケ理論のパラメータが決まる可能性を論じている．このように最後の 3 分間は，重力理論の検証でもあるのである．もし，アインシュタイン理論からのずれが発見されれば，その意義は大変大きい．

4-4-3　最後の 3 ミリ秒

いま，簡単のため連星中性子星の両星の質量が PSR1913+16 のように等しいとしよう．($m_1 = m_2 = m = 1.4M_\odot$) 中性子星の半径は状態方程式にもよるが，10 km くらいであるから Gm/c^2 単位で測ると $5 \times Gm/c^2$ 程度である．したがって，両星の重心の距離が $10Gm/c^2$ 程度になるまでには合体を始めることになる．このような連星中性子星の合体プロセスを最初に論じたのは Clark and Eardley [1977] であった．彼らは比較的簡単なモデルを使って重力波の放出量を論じたが，1980 年代末からは，重力波の検出装置の議論とも関連して，詳しく調べられだした．まず，合体の最終段階はそれまでの 3 分間と違って数ミリ秒の出来事なので最後の 3 分間に対応して，「最後の 3 ミリ秒」と呼ばれる．前節で詳しく論じたように「最後の 3 分間」では，$v_{\rm rot}/c \cong 0.05$ でポストニュートン展開の収束はそんなに早くはないが，式 (4-113) に示したようにゆっくりではあるが収束するように思えるので，ポストニュートン展開がよいと考えられる．しかし，「最後の 3 ミリ秒」では $v_{\rm rot}/c \simeq 0.3$ なので，ポストニュートン展開はよくない．重力も潮汐力が重要になってくるし，衝撃波を含めた流体力学的諸現象も考えなくてはならない．したがって「最後の 3 分間」で使ったような中性子星を質点とみなす近似は使えない．というわけで，「最後の 3 ミリ秒」では数値シミュレーションがほとんど唯一の手段になってくる．しかも，両星の質量が違う一般的な場合を考えると，球対称性，軸対称性も 180° 対称性もなく，全く対称性のない問

表 4-2　連星中性子星の合体のニュートニアン数値シミュレーション

著 者	数値計算法	状態方程式	特 徴
Oohara and Nakamura (1989a∼1992)	差分法 $(141)^3$	$\gamma = 2$	2 つの星の平衡解からはじめている 重力波の反作用入り
Rasio and Shapiro (1992)	粒子法 8,000 粒子	$\gamma = 2$	回転平衡解の安定性
Oohara and Nakamura (1992)	差分法 $(141)^3$	$\gamma = 2$	同上
Centrella and McMillan (1993)	粒子法 2,048 粒子	$\gamma = \frac{5}{3}$, 2	非軸対称衝突
Rasio and Shapiro (1994)	粒子法 4×10^4 粒子	$\gamma > \frac{5}{3}$	状態方程式依存性

題になってくる．連星中性子星の合体の「最後の 3 ミリ秒」を扱うには, 3 次元数値相対論が必要になってくる．ここで, 3 次元というのは空間の次元を意味し, 球対称でも軸対称でもない全く一般的な問題であるということである．以下に 3 次元数値相対論の最近の成果を紹介する．

連星中性子星の合体と関係した 3 次元数値相対論は, いくつかのカテゴリーに分かれる．第 1 のカテゴリーでは, 連星系のニュートン流体力学的な特徴が調べられた．ここでは, 重力波放射による輻射の反作用の効果は考えられていない．解くべき基礎方程式は式 (1-43) から (1-47) で, 式 (1-45) では右辺第 2 項の発熱や熱流は考えない．また, 状態方程式は $p = (\gamma - 1)\rho\epsilon$ とする．今までに行われたシミュレーションを表 4-2 で示す．表 4-2 で, 差分法というのは微分を差分にして解く数値法を言い, 粒子法とは流体を拡がりを持ったいくつかの粒子で近似する方法を言う．差分法では, 空間をいくつかの差分点で表現するが, $(141)^3$ とは $141 \times 141 \times 141$ の差分点があるということである．また, 粒子法の下にある数は用いた粒子の総数である．ここでは Rasio and Shapiro [1992] と Oohara and Nakamura [1992] に例をとって計算結果を示そう．まず, 初期条件としては公転周期と自転周期が同じで (ちょうど月のように常に同じ表面が見えている), 両星がほぼ接しているとする．状態方程式として, $\gamma = 2$ をとると, 公転角速度を Ω として平衡解は [Oohara and Nakamura 1990]

$$\left.\begin{aligned} &\psi + 2K\rho - \frac{x^2 + y^2}{2}\,\Omega^2 = C \\ &\Delta\psi = 4\pi G\rho \end{aligned}\right\} \tag{4-116}$$

で与えられる．ここで K は $P = K\rho^2$ で定義される定数で, 球対称な中性子星の半径 r_0 と

$$K = \frac{2r_0^2 G}{\pi} \tag{4-117}$$

の関係がある．C は一定の定数で, Ω も一定で方向は z 軸の方向とした．さて, この平衡解を $t = 0$ で与えると, その時間発展は Oohara and Nakamura [1992] では, 図 4-28 のようになり, Rasio and Shapiro [1992] では図 4-29 のようになった．

図 4-28 は xy 面での密度の等高線で矢印は速度ベクトル, また両星の質量は, 1.4 $M_\odot$ である．使っている単位は, 長さは $GM_\odot/c^2 = 1.5$ km で, 時間は 1ms である．a) は $t = 0$ で平衡解を表す．潮汐力のため, それぞれの星は球ではないことがわかる．図 4-28 に対応するのが図 4-29 で, 両図がよく似ていることがわかる．両図は差分法と粒子法という違った計算法であるにもかかわ

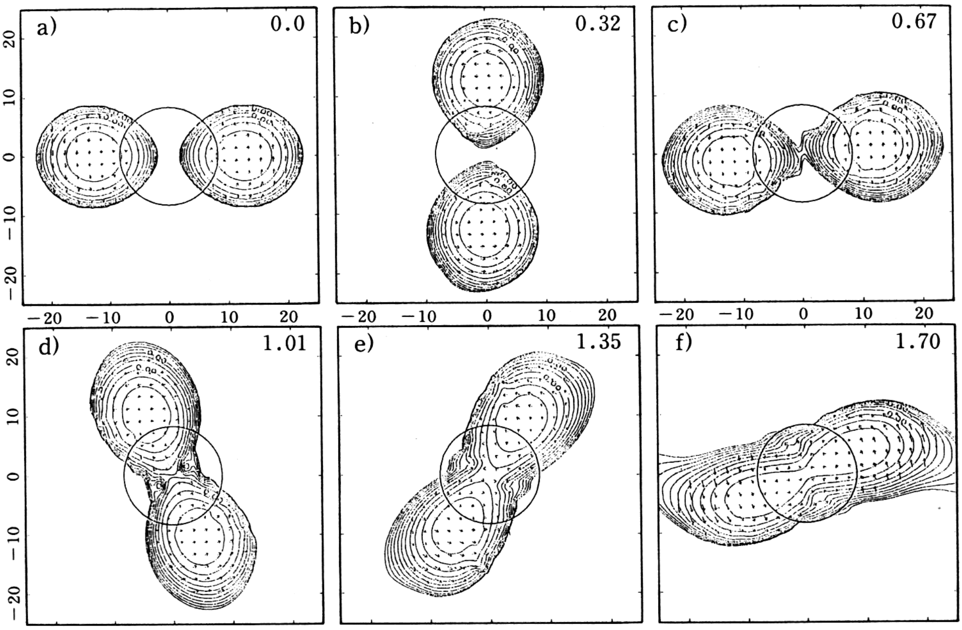


図 4-28　接した 2 つの中性子星の平行解の安定性 Oohara and Nakamura [1992] の差分法によるシミュレーション．中心にある円は全系のシュヴァルツシルト半径である．

らず, 両星が接するような平衡解は, 不安定であることを示している．この不安定性は次のように説明される [Lai, Rasio and Shapiro 1993]．両星の質量を m_1, m_2, 半径を R_1, R_2, そして間隔を a としよう．m_1 を質点と見なしたとき, 潮汐力による変形が星 2 に起こる．その高さを h とすると

$$G\rho_2 h \sim \frac{Gm_1R_2}{a^3} \tag{4-118}$$

が成り立つ．式 (4-118) より, 星 2 は四重極モーメント $Q_2 \sim m_2R_2h$ を持つようになる．その結果, 両星の重力エネルギーは,

$$-\frac{Gm_1Q}{a^3} \sim -Gm_1^2\,\frac{R_2^5}{a^6} \tag{4-119}$$

だけより深くなる．式 (4-119) で, m_1 と m_2 の役割を入れ換えたものの寄与もあるが, どちらにしても潮汐力の効果は, a^{-6} に比例するポテンシャルが入ったのと同じである．いま $m_1 = m_2 = m$, $R_1 = R_2 = R$ として, 潮汐力による重力エネルギーを, f を 1 のオーダーの係数として

$$-f\,\frac{Gm^2R^5}{a^6} \tag{4-120}$$

と書くと, 回転角速度 Ω は重力平衡より

$$\begin{aligned} a\Omega^2 &= \frac{2Gm}{a^2} + 12f\,\frac{GmR^5}{a^7} \\ &= \frac{2Gm}{a^2}\left(1 + 6f\,\left(\frac{R}{a}\right)^5\right) \end{aligned} \tag{4-121}$$

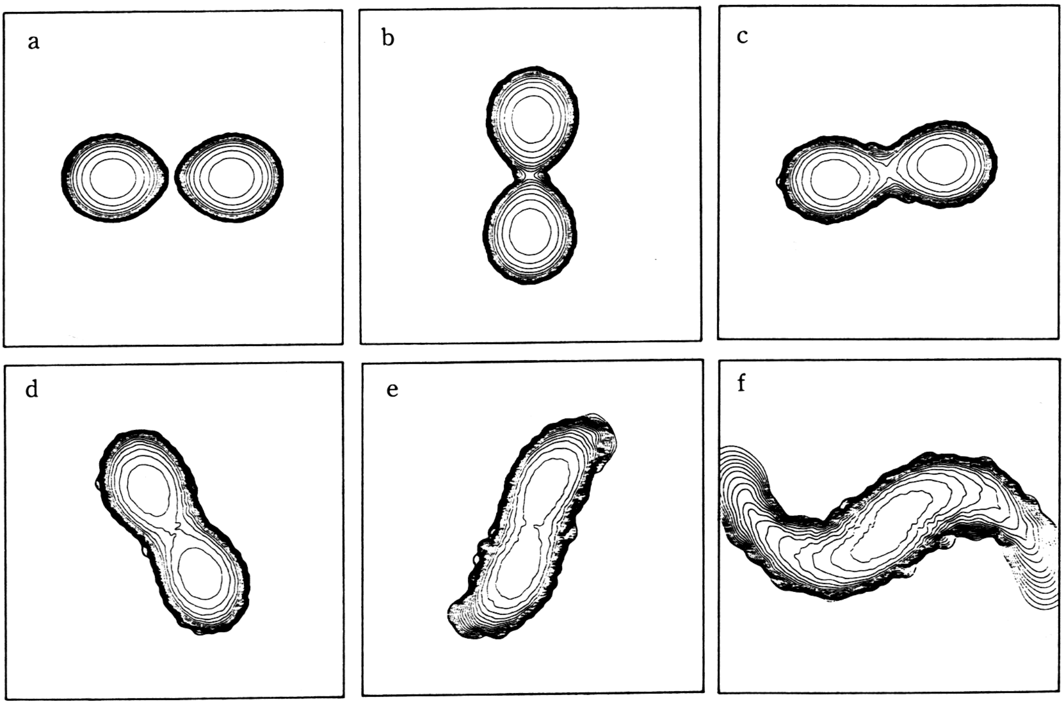


図 4-29　図 4-28 とほとんど同じシミュレーション．ただし，差分法ではなく粒子法を用いている [Rasio and Shapiro 1992].

となって潮汐力が効かない時に較べて増大する．Ω が増大すると運動エネルギーが増大するが，それは式 (4-120) のポテンシャルエネルギーの変化より大きく，その結果両星間の距離 a が小さくなると，逆に両星の全エネルギーが大きくなってしまうことが起こるのである．このような領域では，平衡解が不安定になる．つまり，a が大きくなった方が，エネルギーが下がるから，系はそのように変化するのである．それが図 4-28 と図 4-29 であったのだ．

第 2 のカテゴリーの研究では，第 1 のカテゴリーの計算に重力波放射による輻射の反作用を入れる．式 (4-87) の a として両星が接した時の値 $a = 20$ km を入れると t_c =0.6 ms という値が得られる．この時ケプラー周期 P_b は式 (4-88) より 0.9 ms である．つまり，$P_b \sim t_c$ であり，重力波の輻射の反作用を無視することはできないのである．重力波による輻射の反作用力をどのように書くかについては，四重極公式 (3-94) の正当性も含めて多くの議論がなされていたが，Walker and Will [1980a, 1980b] は，四重極公式は正しいこと，また，ポストニュートン展開のどこまで計算すれば正しい輻射の反作用力が得られるかを明らかにした．ここでは，それらの詳しい議論は，レビューとオリジナルな論文を見てもらうことにする (レビューとして Damour [1987], 木村・太田 [1989], またオリジナルな論文として Chandrasekhar and Esposito [1969], Burke [1971], Misner, Thorne and Wheeler [1973: 1001-1003], Ohta, Okamura, Kimura and Hiida [1973], Futamase and Schutz [1983], Futamase [1987], Blanchet, Damour, and Schäfer [1990])．簡単な求め方としては，反作用は運動方程式の中で反作用ポテンシャルとして現れると考える．つまり，重力ポテンシャル ψ に反作用のポテンシャル $\psi_{\rm react}$ が加わる．この $\psi_{\rm react}$ によってなされる

仕事の平均が式 (3-94) の四重極公式と等しいと考える．すなわち

$$\frac{G}{5c^5} < \dddot{Ɨ}_{jk} \dddot{Ɨ}_{jk} > \; = \; < \int -\frac{\partial \psi_{\rm react}}{\partial x^i} \rho v_i {\rm d}^3 x > \tag{4-122}$$

であるが，式 (4-122) を満たすような $\psi_{\rm react}$ は，一例として，

$$\psi_{\rm react} = \frac{G}{5c^5} \left(\frac{{\rm d}^5}{{\rm d}t^5} Ɨ_{ij} \right) x^i x^j \tag{4-123}$$

がある．式 (4-123) は Burke [1971] と Misner, Thorne and Wheeler [1973] によって詳しく導かれているが，四重極の時間についての 5 階微分を必要とする．Oohara and Nakamura [1989b] は，実際式 (4-123) を用いて輻射の反作用の効果を入れることに成功した．しかし，時間について 5 階微分を求めることは数値的には可能であるが，精度のよい計算をするには，なるべく避けたい．ここで，重要な点は輻射の反作用の効果を取り入れた時に出てくる基礎方程式は，座標条件によるという点である．Oohara and Nakamura [1990] は Blanchet, Damour and Schäfer [1990] による輻射の反作用の定式化を採用した (木村・大田 [1989] の中で，Blanchet, Damour and Schäfer による方法が詳しく説明されている)．そして，以下のような基礎方程式を用いて図 4-28 のシミュレーションに輻射の反作用の効果を取り入れた．基礎方程式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v^j}{\partial x^j} = 0 \tag{4-124}$$

$$\frac{\partial \rho w^i}{\partial t} + \frac{\partial \rho w^i v^j}{\partial x^j} = -\frac{\partial p}{\partial x^i} - \rho \frac{\partial (\psi + \psi_{\rm react})}{\partial x^j} \tag{4-125}$$

$$\frac{\partial \rho \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial \rho \epsilon v^j}{\partial x^j} = -p \frac{\partial v^j}{\partial x^j} \tag{4-126}$$

$$v^i = w^i + \frac{4}{5} \frac{G}{c^5} \dddot{Ɨ}_{ij} w^j \tag{4-127}$$

$$\psi_{\rm react} = \frac{2}{5} \frac{G}{c^5} \left(-R + \overset{(3)}{Ɨ}_{ij} x^i \frac{\partial \psi}{\partial x^j} \right) \tag{4-128}$$

$$\Delta R = 4\pi G \dddot{Ɨ}_{ij} x^i \frac{\partial \rho}{\partial x^j} \tag{4-129}$$

である．Blanchet, Damour and Schäfer による方法では，$Ɨ_{ij}$ の時間についての 3 階微分しかないのが，大きな特徴で，これなら精度のよい計算が期待できる．図 4-30 に 2 つの 1.49 $M_\odot$ の中性子星の合体を示す．時間の単位は 5μs である．

図 4-28 と違って今度は重力波が角運動量を放出するので，合体が進行する (図 4-30-b)．図 c と図 d のフェーズで一たん合体したように見えるが，遠心力の効果で，図 e, 図 f で再び 2 つの連星を見ることができる．このようなことを何回か繰り返した後に図 p あたりでは軸対称に近くなる．中心にある円は全系のシュヴァルツシルト半径で，図 4-30-p では，ほとんどの物質がシュヴァルツシルト半径の中に入っているので，ブラックホールができたと考えられる．図 4-31 は仮

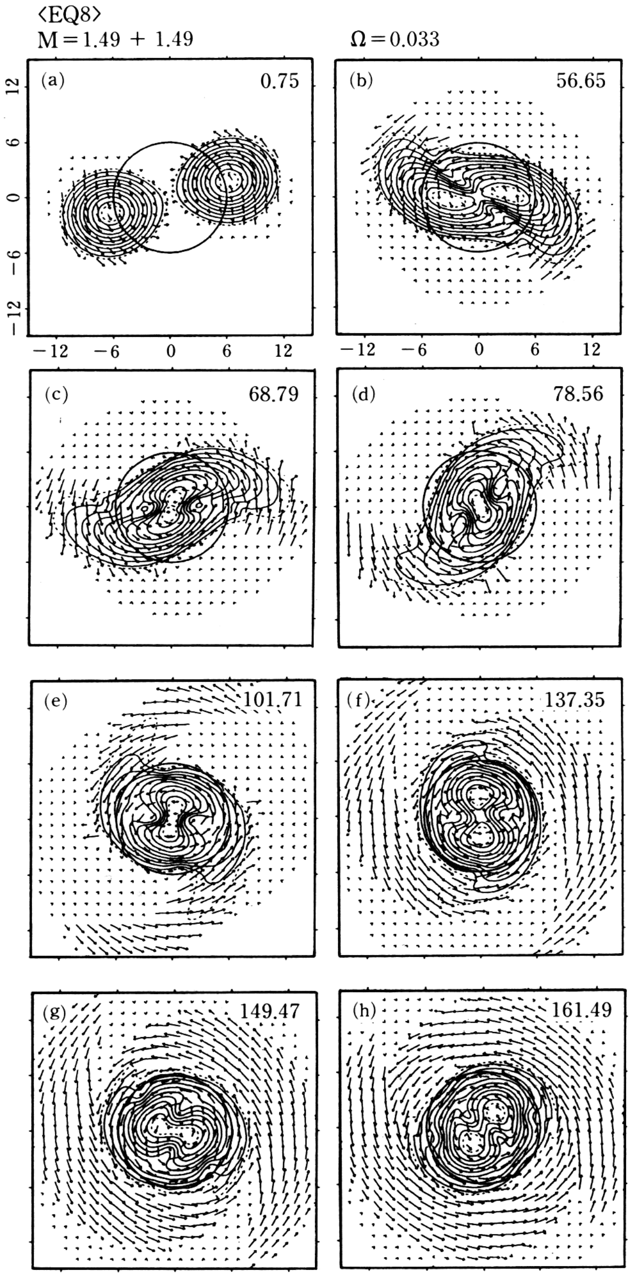


図 4-30　重力波による輻射の反作用を入れた連星中性子星の合体の 3 次元ニュートニアン数値シミュレーション．赤道面のみを表示している [Oohara and Nakamura 1990]．各星の質量は $1.49M_\odot$．時間の単位は 5μs.

にこのような合体が我々から 10 Mpc の距離で起きたとした時の地上での h_+ と $h_\times$ を示す．この場合, $i = 0$ としている．図 4-32 には, 合体前の h_+ も示している．このような波形が観測されれば, それを理論と比較することが可能になってくる．図 4-33 には, 両星の質量が違って m_1 (右側) $= 1.83\ M_\odot$, m_2 (左側) $= 0.97\ M_\odot$ の場合である． 軽い方の星が, 重い星に潮汐破壊される

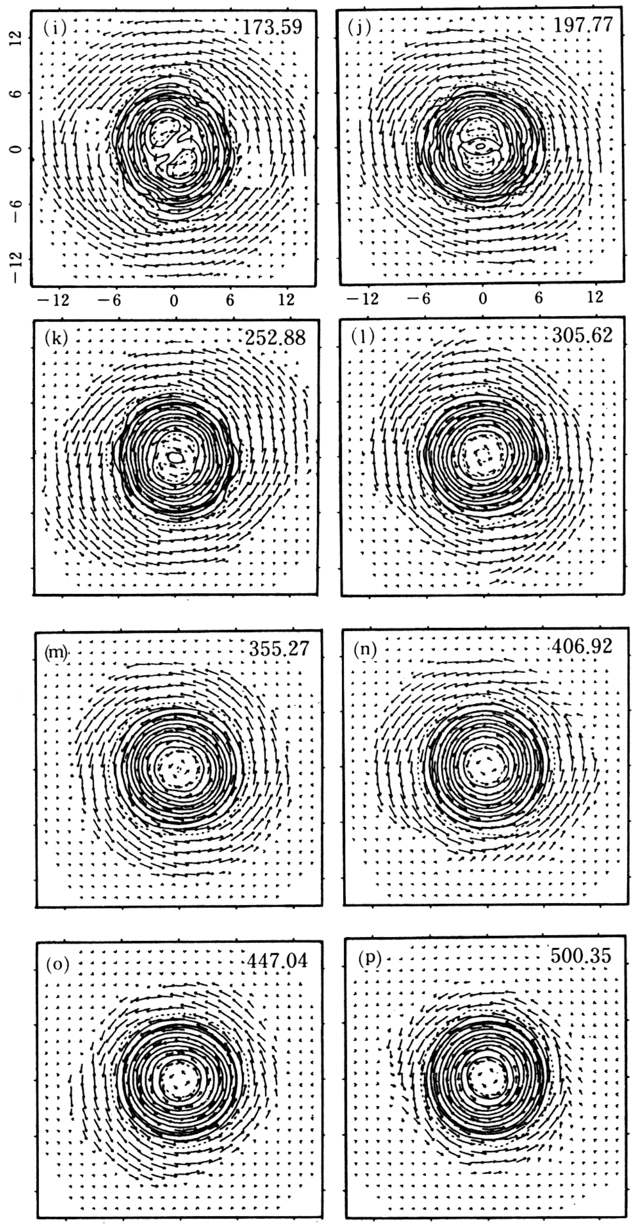


図 4-30 (続き)

のを見ることができる [Oohara and Nakamura 1991]. また波形を図 4-34 に示す.

もっと簡単な輻射の反作用を入れたシミュレーションは, Zhuge, Centrella and McMillan [1994] によっても行われている. しかし, Bildsten and Cutler [1992] と Kochnek [1992] によると, 合体前の連星では, 粘性によって公転周期と自転周期が同じになるには時間が足りないので, 公転周期

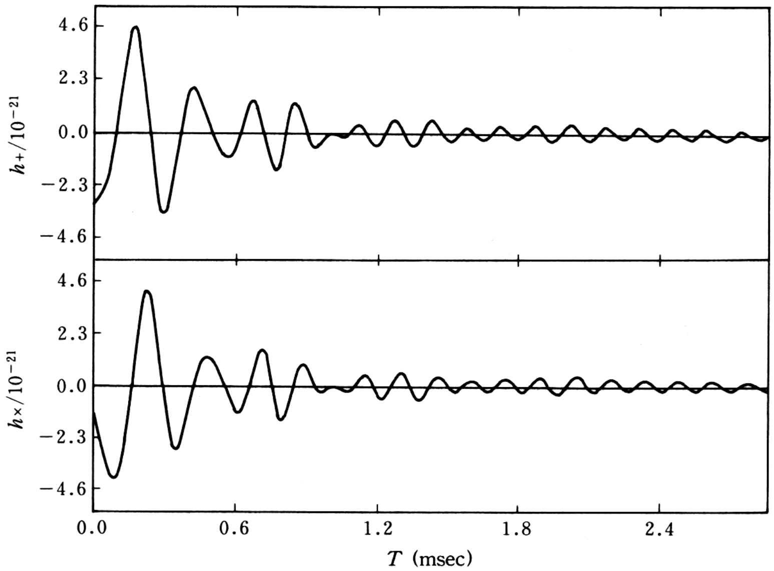


図 4-31　図 4-30 の中性子星の合体時に放出される重力波．我々から 10 MPc の距離で合体が $i=0$ で起こったとして，$h+$ と $h\times$ の時間変化を示している [Oohara and Nakamura 1990].

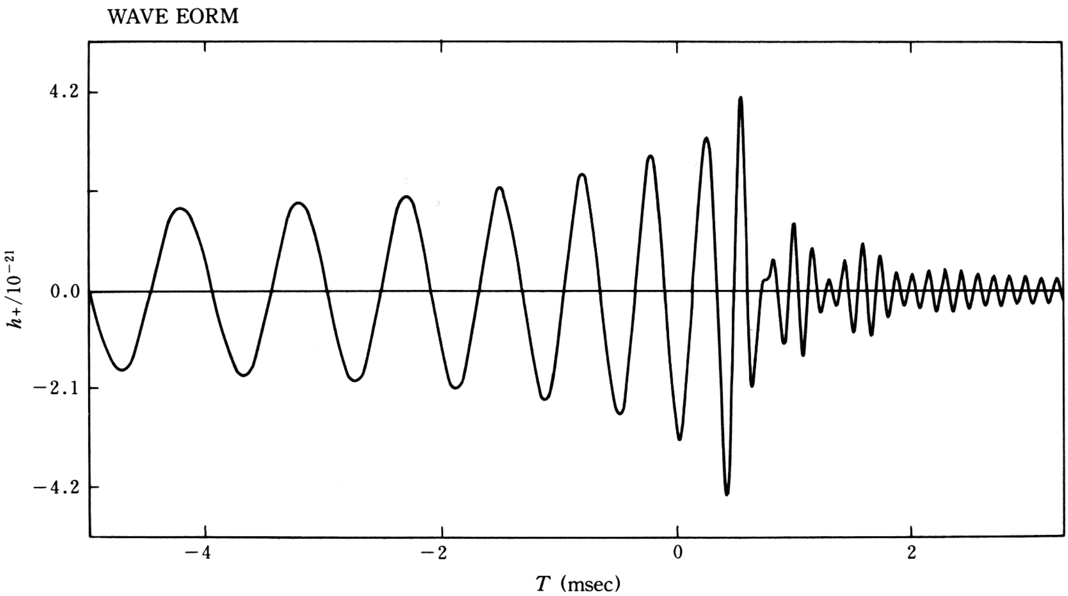


図 4-32　図 4-31 のシミュレーションは $t \geqq 0$ であるが，$t \leqq 0$ では 2 つの連星を質点で近似した [Oohara and Nakamura 1990].

と自転周期は異なると考えるべきである．そのようなシミュレーションは, Shibata, Nakamura and Oohara [1992, 1993] や Davies, Benz, Piran and Thielmann [1994] によって行われている．また Lai, Rasio and Shapiro [1994], Lai [1994], Lai and Shapiro [1995] によっても定性的に論じられている．Oohara and Nakamura [1992] はポストニュートン項の影響をも調べている．

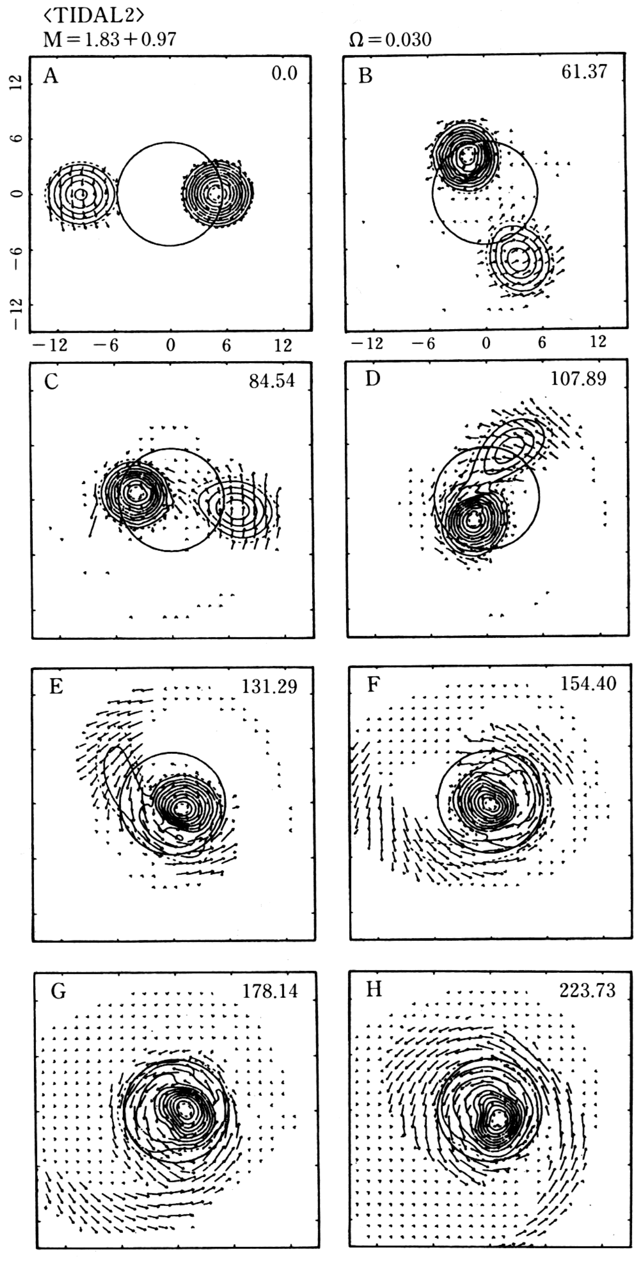


図 4-33　質量が違う場合 (1.83 $M_\odot$ と 0.97 $M_\odot$) の連星中性子星の合体．最初左にあった軽い星が潮汐破壊されるのがわかる [Oohara and Nakamura 1991].

さて，以上はニュートンの運動方程式に輻射の反作用を入れた計算であったが，Lincoln and Will [1990] と Kidder, Will and Wiseman [1992] によると一般相対論の効果で同じ質量 m の連星の場合 $a \lesssim 14Gm/c^2$ では，安定な円軌道が存在しない．これは，シュヴァルツシルトブラック

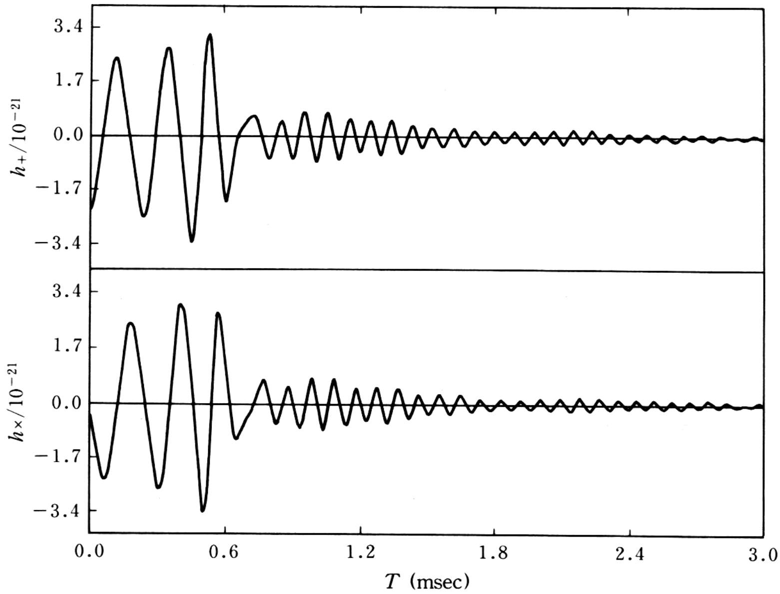


図 4-34　図 4-33 の時の重力波の波形. 我々から 10 MPc の距離で合体が $i=0$ で起こったとして, h_+と $h_\times$ の時間変化を示している [Oohara and Nakamura 1991].

ホールのまわりの試験粒子の運動では, $r<6GM/c^2$ で安定な円軌道が存在しないことに対応している. したがって, ニュートン流体力学に重力波の輻射の反作用を入れるという取り扱いには, 自ずから限界がある. つまり, 一般相対性理論を完全に考慮する必要がある. この節の最後に完全に一般相対性理論を取り入れた 3 次元数値シミュレーションを議論する [Nakamura 1994].

A) 初期値方程式

第 1 章でやったように, アインシュタイン方程式の $(3+1)$ 次元形式では線素は

$$\mathrm{d}s^2=-\alpha^2\mathrm{d}t^2+\gamma_{ij}(\mathrm{d}x^i+\beta^i\mathrm{d}t)(\mathrm{d}x^j+\beta^j\mathrm{d}t), \tag{4-130}$$

で与えられる. ここで, α,β^i と γ_{ij} はそれぞれラプス関数, シフトベクトルと 3 次元空間の計量である. 初期データは

$${}^{(3)}R+K^2-K_{ij}K^{ij}=16\pi\rho_{\mathrm{H}}, \tag{4-131}$$

$$K_i{}^j{}_{;j}-K_{;j}=8\pi J_i \tag{4-132}$$

という拘束方程式を満たさなければならない. ここで ${}^{(3)}R$, K_{ij}, K, ρ_{H} と J_i はそれぞれスカラー曲率, 外部曲率とそのトレース, エネルギー密度と物質の運動量密度である. 式 (4-132) で ; は γ_{ij} についての共変微分を意味する (第 1 章では | としたことに注意). さて, O'Murchadha and York [1978] に従って, γ_{ij} は共形平坦であると仮定する,

$$\gamma_{ij}=\phi^4\tilde{\gamma}_{ij}, \tag{4-133}$$

ここで $\tilde{\gamma}_{ij}$ は平坦な計量である．さまざまな量の共形変換を

$$\tilde{K}_{ij} \equiv \phi^2 K_{ij}, \tilde{K}_i^j \equiv \phi^6 K_i^j, \tilde{K}^{ij} \equiv \phi^{10} K^{ij}$$
$$\rho_B \equiv \rho_{\mathrm{H}}\phi^6 \text{ and } \tilde{J}_i \equiv J_i\phi^6 \tag{4-134}$$

のように定義する．さて，いま，$K = 0$ とすると，式 (4-132) は

$$\tilde{K}_i{}^j{}_{|j} = 8\pi\tilde{J}_i \tag{4-135}$$

となる．ここで $|$ は，$\tilde{\gamma}_{ij}$ に関する共変微分である．ここで $\tilde{K}_{ij}$ を

$$\tilde{K}_{ij} = \tilde{K}_{ij}^{\mathrm{TT}} + (\tilde{W}_{i|j} + \tilde{W}_{j|i} - \frac{2}{3}\,\tilde{\gamma}_{ij}\tilde{W}^l{}_{|l}) \tag{4-136}$$

のように分解する．この分解は式 (2-74) の分解の一般化である．ここで $\tilde{K}_{ij}^{\mathrm{TT}}$ は $\tilde{K}_{ij}$ のトランスバーストレースレス部分で $\tilde{W}_i$ は縦波成分である．簡単のため $\tilde{K}_{ij}^{\mathrm{TT}} = 0$ を仮定すると，式 (4-135) は，

$$\Delta_f\ \tilde{W}_i + \frac{1}{3}\ (\tilde{W}^l{}_{|l})_{|i} = 8\pi\tilde{J}_i \tag{4-137}$$

となる．ここで，Δ_f は平坦なラプラシアンである．本当の連星中性子星の合体では，それまでに重力波が放出されているので，$\tilde{K}_{ij}^{\mathrm{TT}} \neq 0$ である．したがって，$\tilde{K}_{ij}^{\mathrm{TT}}$ は，ポストニュートン展開かその他の方法で与える必要があるが，ここでは簡単のためにゼロとした．

W^i の発散を

$$DIV \equiv W^i{}_{|i} \tag{4-138}$$

で定義しよう．式 (4-137) の発散をとると

$$\Delta_f\ (DIV) = 6\pi\tilde{J}^i{}_{|i} \tag{4-139}$$

を得る．まず，式 (4-139) を与えられた $\tilde{J}_i$ について解く．これで求まった DIV を使うと式 (4-137) は

$$\Delta_f\tilde{W}_i = -\frac{1}{3}(DIV)_{|i} + 8\pi\tilde{J}_i \tag{4-140}$$

となる．式 (4-137) はもともとは $\tilde{W}_i$ についてカップルした楕円形の式であったが，式 (4-140) によってカップルしなくなった．結局 3 本の独立な式 (4-140) をそれぞれ解けばよいこととなった．式 (4-139) と式 (4-140) の境界条件は

$$\tilde{W}_i = \frac{1}{r^3}\epsilon_{ijk}x^jM^k + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \tag{4-141}$$

と

$$DIV = O\left(\frac{1}{r^4}\right) \tag{4-142}$$

で与えられる．ここで M^k は系の角運動量である．さて式 (4-131) は

$$\Delta_f\phi = -\frac{2\pi\rho_{\mathrm{B}}}{\phi} - \frac{1}{8}\phi^{-7}\tilde{K}_{ij}\tilde{K}^{ij} \tag{4-143}$$

のように書き換えられる．式 (4-143) は与えられた ρ_{B} に対して

$$\phi = 1 + \frac{M_{\mathrm{G}}}{2r} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \tag{4-144}$$

の境界条件の下で解かれる．ここで M_{G} は系の重力質量である．

B) 相対論的流体力学

相対論的流体力学の式は式 (1-81), (1-84) と (1-86) であるが, 式 (1-81) のかわりに

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{\gamma}\alpha u^0 \rho\epsilon\right) + \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{\gamma}\alpha u^0 \rho\epsilon V^l\right) = -p\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\alpha\sqrt{\gamma}u^\nu\right) \tag{4-145}$$

を使う．また,

$$\rho_{\mathrm{N}} \equiv \sqrt{\gamma}\alpha u^0 \rho$$

と

$$u_i^{\mathrm{N}} \equiv J_i/(\alpha u^0 \rho)$$

を定義すると相対論的流体力学の式はニュートン流体力学の対応する方程式に似てくる．つまり, 式 (1-84), (4-145) と (1-86) は

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_N u_i^{\mathrm{N}}\right) + \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\rho_N u_i^{\mathrm{N}} V^l\right) = \cdots\cdots \tag{1-84$'$}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_{\mathrm{N}}\epsilon\right) + \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\rho_{\mathrm{N}}\epsilon V^l\right) = \cdots\cdots \tag{4-145$'$}$$

と

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_{\mathrm{N}} + \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\rho_{\mathrm{N}} V^l\right) = 0 \tag{1-86$'$}$$

となる．ρ_{N}, u_i^{N} と ϵ という変数を使うと, ニュートン流体力学の 3 次元コードをほとんどそのまま使って, 相対論的流体コードを作ることができる．

C) 外部曲率の時間発展

外部曲率の時間発展の式は

$$\frac{\partial}{\partial t}K_{ij} - \frac{\partial}{\partial x^l}(K_{ij}\beta^l) = (SK)_{ij}^{\mathrm{main}} + (SK)_{ij}^{\mathrm{non}} + (SK)_{ij}^{\beta} \tag{4-146}$$

ここで

$$(SK)_{ij}^{\mathrm{main}} = \alpha\{{}^{(3)}R_{ij} - 8\pi(S_{ij} + \frac{1}{2}\gamma_{ij}(\rho_{\mathrm{H}} - S_l^l))\} - \alpha_{|ij} \tag{4-147}$$

$$(SK)_{ij}^{\mathrm{non}} = \alpha\left(KK_{ij} - 2K_{il}K^l{}_j\right) \tag{4-148}$$

そして

$$(SK)_{ij}^{\beta} = K_{mj}\frac{\partial\beta^m}{\partial x^i} + K_{mi}\frac{\partial\beta^m}{\partial x^j} - K_{ij}\frac{\partial\beta^m}{\partial x^m} \tag{4-149}$$

ここで | は γ_{ij} に関する共変微分を意味する．

D) 時間座標

$t>0$ に対しても共形因子 ϕ を

$$\phi \equiv (\det(\gamma_{ij}))^{\frac{1}{12}} \tag{4-150}$$

で定義する. α の決め方としては

$$\alpha = \exp\Big[-2(\tilde{\phi} + \frac{\tilde{\phi}^3}{3} + \frac{\tilde{\phi}^5}{5})\Big] \tag{4-151}$$

$$\tilde{\phi} \equiv \phi - 1$$

を用いる. Shibata and Nakamura [1992] は, この時間座標を α が共形因子 ϕ で決められるので, 共形時間座標条件と呼んだ. この時間座標の性質については上の文献で詳細な議論がなされている. この時間座標では中心から離れた外側の部分では計量が急激に, シュヴァルツシルト計量に近づいて行く. また同時に極大切断 (maximal slicing) と同じように, 特異点を避ける性質がある. 共形因子 ϕ は, ϕ の時間発展の式

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\phi}{12}\Big[-2\alpha K + \frac{2}{\phi^6}\frac{\partial}{\partial x^l}\ (\phi^6\beta^l)\Big] \tag{4-152}$$

を解くか, ハミルトン拘束方程式を解くことによって求められる.

$$\tilde{\Delta}\phi = -2\pi\rho_{\mathrm{H}}\phi^5 - \frac{\phi^5}{8}\ (K_{ij}K^{ij} - K^2 - \phi^{-4}\cdot{}^{(3)}\tilde{R}) \tag{4-153}$$

ここで, $\tilde{\Delta}$ は

$$\tilde{\gamma}_{ij} = \gamma_{ij}/\phi^4$$

についてのラプラシアンである.

E) 空間座標条件

$t>0$ でも共形変換

$$\begin{aligned}\tilde{K}_{ij} \equiv \phi^{-4}K_{ij},\ \tilde{\beta}_i = \phi^{-4}\beta_i\ ,\\ K = \tilde{K}, \tilde{K}^j_i = K^j_i,\ \tilde{\beta}^i = \beta^i\end{aligned} \tag{4-154}$$

を定義する. そうすると計量の発展方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\gamma}_{ij} = (\tilde{\beta}_{i|j} + \tilde{\beta}_{j|i} - \frac{2}{3}\tilde{\gamma}_{ij}\tilde{\beta}^l{}_{|l}) - 2\alpha(\tilde{K}_{ij} - \frac{1}{3}\tilde{\gamma}_{ij}\tilde{K}) = A^{\mathrm{T}}_{ij} \tag{4-155}$$

となる. ここで $|$ は $\tilde{\gamma}_{ij}$ についての共変微分である. ここで式 (4-155) の右辺の通常の発散がゼロであることを要求する,

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\ A^{\mathrm{T}}_{ij} = 0 \tag{4-156}$$

そうすると式 (4-156) は

$$\Delta_f \beta^i + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x^i}(\frac{\partial \beta^l}{\partial x^l}) = \frac{\partial}{\partial x^j}(2\alpha(\tilde{K}_{ij} - \frac{1}{3}\tilde{K}\tilde{\gamma}_{ij})) - \frac{\partial}{\partial x^j}$$
$$[(\tilde{\gamma}_{jl} - \delta_{jl})\frac{\partial \beta^l}{\partial x^i} + (\tilde{\gamma}_{il} - \delta_{il})\frac{\partial \beta^l}{\partial x^j} - \frac{2}{3}(\tilde{\gamma}_{ij} - \delta_{ij})\frac{\partial \beta^l}{\partial x^l} + \beta^l \frac{\partial}{\partial x^l}\tilde{\gamma}_{ij}] \quad (4\text{-}157)$$

と書き換えられる．式 (4-157) は初期値方程式 (4-137) と似ているが，一般的には β^i のカップルした式である．式 (4-156) のかわりに

$$A^{\mathrm{T}}{}_i{}^j{}_{|j} = 0 \quad (4\text{-}158)$$

を要求すると，York and Smarr [1978] による最小 Distortion 条件になる．この意味で，我々は式 (4-156) を擬似最小 Distortion 条件と呼ぶ．どちらの座標条件でも十分遠方ではトランスバース-トレースレスゲージになる [York and Smarr 1978].

F) 数値結果

以下の結果では $(80)^3$ の直交座標格子を用いて

$$M = M_\odot\ , \quad L = \frac{GM_\odot}{c^2}\ , \quad T = \frac{GM_\odot}{c^3} \quad (4\text{-}159)$$

の単位を使っている．また状態方程式は $p = \rho\epsilon$ である．

$n = 1$ のポリトロープの密度分布を持って，質量が 1 半径 r_0=6 の 2 つの球対称な中性子星を $x = r_0$ と $x = -r_0$ に置く．これは，2 つの中性子星が接触していることを意味する．角速度 Ω の剛体回転と次のような v_x^{N} と v_y^{N} を与える．

$$v_x^{\mathrm{N}} = -\Omega y - \mathrm{sgn}(x)\Omega r_0 \quad (4\text{-}160)$$

$$v_y^{\mathrm{N}} = \Omega x$$

Ω の違う 3 つのモデル BI1, BI2 と BI3 を解いた．全角運動量を重力質量の 2 乗で割った値 q は BI1, BI2 と BI3 でそれぞれ 0.71, 1.43 と 1.01 であった．グリッドは等間隔で，それぞれの方向で最も遠いグリッドの座標の絶対値は 40 である． 図 4-35 a ～ d に，モデル BI3 の密度分布 (左) と "重力波のエネルギー密度" $\rho_{\mathrm{GW}} \equiv (A_{ij}^{\mathrm{TT}})^2 r^2/(32\pi)$ を右に示す．すでに第 2 章で述べたように重力波のエネルギー密度は局所的に定義できないが，ここでは上で定義した量を示す．それぞれの図では，xy, yz と zx 面での密度の等高線を示す．密度の値の最大と最小は，MAX と MIN で示してある．等高線は等間隔で MAX から MIN まで描いている．左の密度の図では，矢印は V^ℓ を表している．2 つの中性子星が合体するとともに 90° 回転しているのを見ることができる．事象の地平線は求められていないが，最終的に形成されるものは，回転ブラックホールであると思われる．"重力波のエネルギー密度" (右) は興味深い重力波の発生と伝播の様子を示している．xy 面では渦状のパターンが見えるが，yz と zx 面では，z 方向に主にピークのあるパターンになっている．

このように全く初期データに対称性のないアインシュタイン方程式を初期値問題として数値的に解くことが可能になってきた．連星中性子星の合体時の重力波が検出されるころには，シミュ

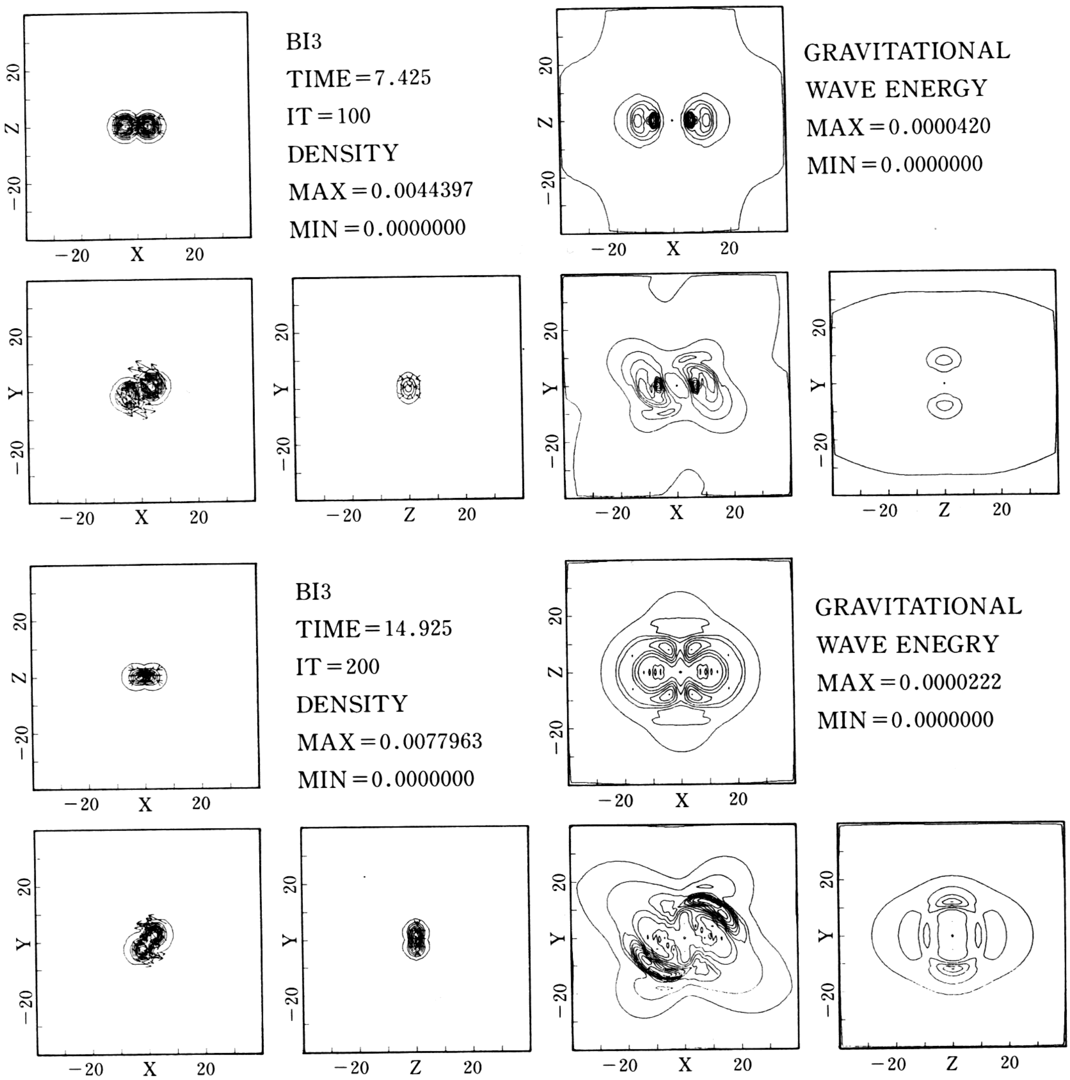


図 4-35　完全に一般相対論を取り入れた連星中性子星の合体の 3 次元シミュレーション．左は密度，右は "重力波のエネルギー密度" を示す．重力波のエネルギーは正しくは，もちろん Brill-Hartle 平均しなくてはならない [Nakamura 1994]．時間の単位は 5μs．各星の質量は $1M_{\odot}$．

レーション結果と観測データを比較することによって新しい物理が明らかになる可能性がある．いま, 考えられることを列記しておくと

1) 最後の 3 分間の波形の観測データを理論的なテンプレートと比較することにより, 両星の質量, スピンが決まる可能性がある [Cutler and Flanagan 1994].
2) 連星中性子星の安定な最も内側の円軌道の半径は, 中性子星の半径に依存する．したがって波形解析から中性子星の半径が決まる可能性がある．
3) 中性子星の半径と質量の関係がわかると核物質密度を超える超高密度物質の状態方程式が決定されるかもしれない [Lindblom 1994].
4) 連星中性子星までの距離が決まる可能性がある [Schutz 1986, Cutler and Flanagan 1992]. したがってハッブルパラメータや減速パラメータといった宇宙論のパラメータが決まるか

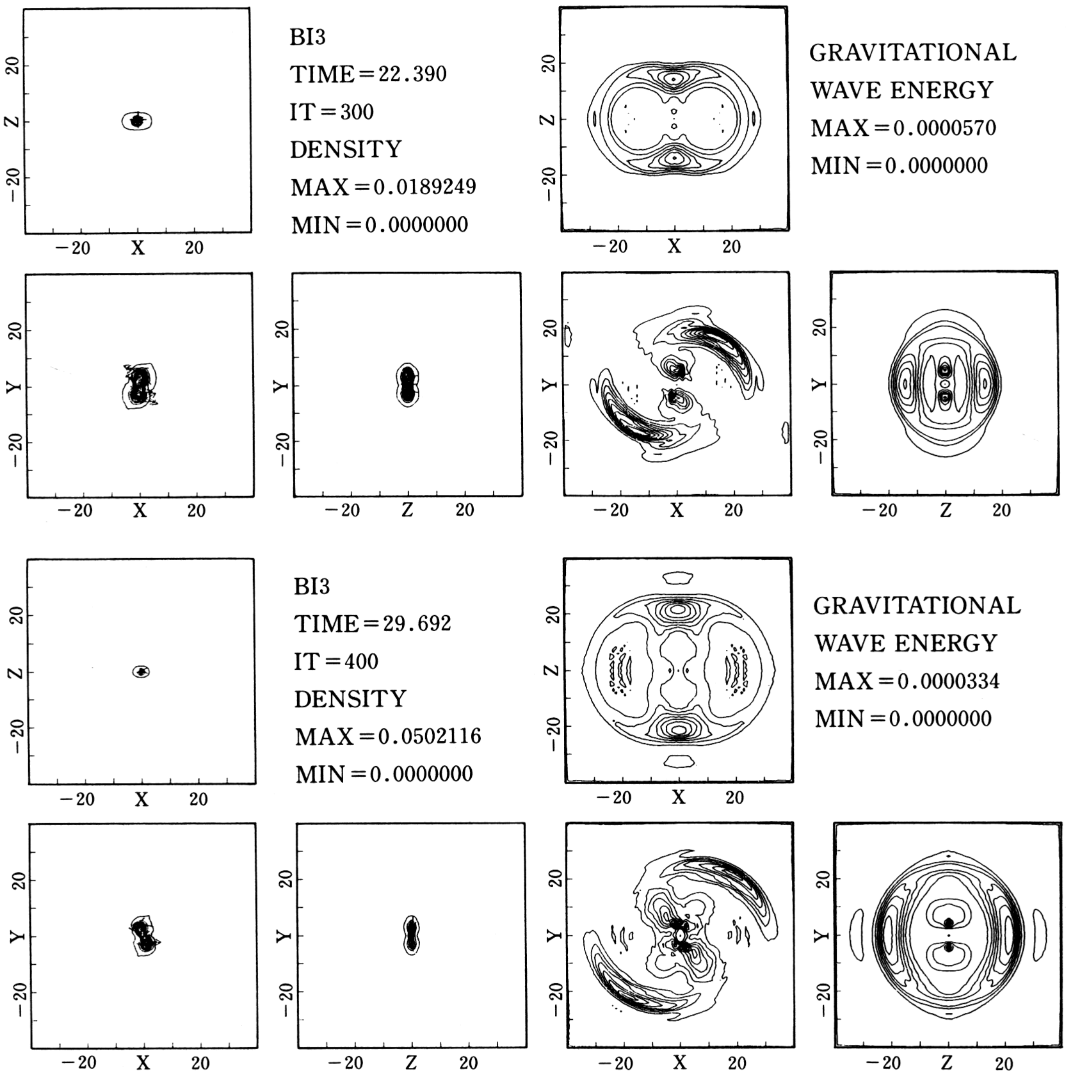


図 4-35　続き

もしれない [Chernoff and Finn 1993, Finn 1992, Finn and Chernoff 1993, Finn 1994).

5) PSR1913 + 16 のような 1.4 $M_\odot$ と 1.4 $M_\odot$ の 2 つの中性子星の合体では, 全質量は 2.8 $M_\odot$ なので, 中性子星の最大質量を超える [Rhodes and Ruffini 1974, Chitre and Hartle 1976]. したがって, 角運動量を持ったブラックホールが形成されると予想される [Oohara and Nakamura 1990]. すると, 「最後の 3 ミリ秒」でブラックホールの準固有振動が励起されるはずで, この実部と虚部の値からブラックホールの質量と角運動量が決まるはずである [Detweiler 1980, Leaver 1985, 1986]. この質量が「最後の 3 分間」で決められた中性子星の質量から放出された重力波のエネルギーを引いたものになっていれば, 強い重力場での一般相対性理論の検証ならびにブラックホール時空の確認ができる.

6) 「最後の 3 分間」で一般相対論が正しいかどうかがわかるかもしれない. 例えば, もしブランス-ディッケ理論が正しくて, ブランス-ディッケ理論のパラメータ $\omega \approx 2000$ なら, ω が決

まるかもしれない [Will 1994]. これは重力理論が決まるかもしれないという重要な可能性の指摘である.

7) もちろん全く予想もしなかった現象が起きるかもしれない. 例えば, 事象の地平線に囲まれない裸の特異性 (Naked Singularity) が発見されるかもしれない.

このように理論的には, いろいろ考えることができる. しかし, 重要なことは, 第5章以降で議論されることではあるが, このような理論家の夢はいかにして重力波を検出するかという点にかかっている.

4-4-4 連星中性子星の合体とガンマ線バースト

観測的に連星中性子星の合体が頻繁に起こっているという証拠はないのだろうか. 中性子星では重力が大変強いし密度も高い. したがって合体時に重力波以外にも, 何らかの電磁波を放出しないのであろうか? これに関して, GRO (Gamma Ray Observatory) によるガンマ線バーストの観測がある. GRO は 1991 年 4 月に NASA が打ち上げた衛星で, 今までの装置に比べて約 100 倍の面積を持ちバースト源の位置を $5^\circ \sim 10^\circ$ の精度で決定できる. Meegan et al. [1992] によるとそれまでの, ガンマ線バースト銀河円盤中性子星説 [村上 1991] を根本から揺るがすものであった. (1) 方向分布は等方的. (2) 空間分布については一様ではない. 遠くほどその密度は小さい. (3) 年間 1000 イベントほどある. (4) 源のサイズは 0.1 ミリ秒の変動がある故, 0.1 ミリ秒 $\times$ 光速 $=$ 30 km 程度. (5) $\sim$ 100 MeV に至るまでのガンマ線が出ており, スペクトルは, $E^{-1}\exp(-E/kT)$ で近似できるが T は変動する. (6) 全エネルギーは, 距離を $d$kpc として $\sim 4\times10^{37}$erg d^2 である. (7) バーストの継続時間は短いもので 7 ミリ秒, 長いもので 20 分 (5 桁ものダイナミックレンジがある). 典型的には数秒. (8) サイクロトロン吸収線が存在するものがあり磁場は 10^{12}G と見積もられる. (9) ガンマ線バーストの前後に X 線が放射されており, そのスペクトルは 2 keV 程度の黒体輻射に合う. 上の 9 つの事実を納得いく形で説明することは大変むずかしい. 特にガンマ線バーストの銀河円盤中性子星説は困難になった. 等方なのは, GRO でもまだ銀河円盤内の近くを見ているからだと言い逃れられるが, 空間的には非一様な分布を説明するのは大変むずかしい. バースト源が何で, どこにあるのかすら答えにくい. 銀河円盤よりずっと外側の銀河ハローにある中性子星とする説では等方性の説明のため銀河のサイズ 10 kpc の何倍かの大きさに分布している必要がある. そうなると, もっと遠くの源, 宇宙論的なものがごく自然になってくる. , 宇宙論的な距離 ($\sim$4 Gpc または, $z \sim 1$) での連星中性子星の合体がガンマ線バーストではないかと論じられている [Haensel, Paczynsky and Amsterdamski 1991, Rees and Meszaros 1992]. まず, 宇宙論的なバースト源だと (1) 等方性は全く問題がない. (2) 非一様性は, 宇宙膨張による赤方偏移のため, 遠くのものが暗く見えるので, 見かけ上起こる. (3) 連星中性子星の合体は年間 200 Mpc 内に 2 $\sim$ 3 イベントとすると全宇宙では年間 10^3 程度は合体すると見積もられるのでイベント数は説明可能である. (4) 源のサイズは 10 km 程度で問題はない. (5) 合体時に, 中性子星はブラックホールになると考えられるが, この時に $\sim 10^{53}$erg の重力エネルギーが解放される. これは, 必要とされるガンマ線のエネルギー $\sim 10^{51}$erg の 100 倍に当たる. したがってエネルギーの 1%程度をガンマ線に変換することを考えればよい. しかしそのメカニズムはわかっていない.

ガンマ線バーストとして連星中性子星の合体がすでに観測されているかもしれない．もしそうなら重力波との同時観測によって，ガンマ線バースト ＝ 連星中性子星の合体と確認される．

4-5　その他の重力波源

4-5-1　Naked Sigularity の形成と重力波

前章の最後で，裸の特異点について言及した．回転星の重力崩壊などでは，4-2 節で示したように通常の初期条件では，事象の地平線ができて裸の特異点ではなくブラックホールができる．しかし，Shapiro and Teukolsky [1991] は，相対論的な無衝突系のプロレート (葉巻状) な重力崩壊で裸の特異点が形成される可能性を示した．このことは Shapiro and Teukolsky [1991] の 9 年前にも Nakamura and Sato [1982] が，初期の内部エネルギーを小さくしたプロレートなガスの一般相対論的重力崩壊でも示唆した事実であった．これらのシミュレーションでの裸の特異点の形成可能性の主張は，見かけの地平線 (Apparent Horizon) は形成されなかったが，潮汐力 (例えば $I = R_{\mu\nu\rho\sigma}\ R^{\mu\nu\rho\sigma}$) が発散する傾向が見られたというのが根拠になっている．論理的には，見かけの地平線ではなくて事象の地平線があるかないかが裸の特異点か，ブラックホールかを決める [Wald and Iyer 1991]．しかし，スピンドル形状の平衡解の解析でも同様に事象の地平線は存在しないが，I が発散する傾向が確かめられたので，動的なプロレート状崩壊でも，やはり裸の特異点ができるのかもしれない．裸の特異点が形成されるとして，その時にどのような重力波が放出されるかは興味深い．初期データの解析 [Nakamura, Shapiro and Teukolsky 1988] でも四重極公式を使ったダストのプロレート重力崩壊 [Nakamura, Shibata and Nakao 1993] でも大量の重力波の放出が期待されている．もちろん結論を得るには，一般相対論を完全に取り入れた精度のよいシミュレーションをする必要があるが，裸の特異点は，全く予想もされなかった重力波の源になるかもしれない．

4-5-2　Wagoner 星からの重力波

4-1 節でも少しふれたが，回転星の重力エネルギーを W，回転エネルギーを T とすると $T/|W|$ >0.14 になると，$m = 2$ のバーモードに対して，重力波を考慮すると，回転星は不安定であることが知られている [Chandrasekhar 1970]．そこで，Wagoner [1984] が指摘したのは，X 線星が重力波を放出しているかもしれないという可能性である．X 線星の中にはブラックホール候補もあるが [McClintck 1992]，多くは中性子星であり，伴星からのガスが中性子星に落下する時に解放される重力エネルギーが X 線星のエネルギー源である．伴星からのガスは，中性子星に対して，角運動量を持っているので，降着円盤を作る．円盤内のガスは，粘性のため角運動量を失いながら中性子星表面に落下する．したがって，中性子星は落下したガスの持ち込む角運動量のため，磁場が小さくて 10^8 ガウス 程度以下であれば，常にスピンが増大し，ついには $T/W > 0.14$ となって非軸対称モード不安定によって重力波の放出が始まる．以後は，持ち込まれる角運動量と重力波による角運動量放出が等しくなる所で釣り合うと考えられる．Wagoner [1984] による評価では，重力波の振幅 h はガスの降着率を $\dot{M}$ ($M_\odot$ y^{-1})，X 線星までの距離を r,

重力波の振動数を f として

$$h \sim 2 \times 10^{-26} \left(\frac{r}{1\mathrm{kpc}}\right)^{-1} \left(\frac{f}{1\mathrm{kHz}}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\dot{M}}{10^{-8} M_{\odot}\mathrm{y}^{-1}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4-161}$$

となる. f の範囲は 200 ～ 800 Hz と考えられる. このような X 線星がどのくらいあるのかはよくわかっていない. しかし, 1 つの重力波源の候補ではある.

4-5-3　連星からの重力波

光学的な観測から連星であることがわかっているものは, 非常に確かな重力波源である. それらには, 進化していない連星 (UBs: Unevolved Binaries), 激変星 (CBs: Cataclysmic Binaries), 白色矮星の近接連星 (CWDs: Close White Dwarf Binaries), W UMa 連星等がある. また, 電波で見つかる連星パルサー (NBs: Nurtron Star Binaries) やブラックホール-パルサー連星 (BH-NB) がある. これらの連星の数は我々の銀河中に $N_{\mathrm{UB}} \sim 7 \times 10^{10}$, $N_{\mathrm{WUMa}} \simeq 3 \times 10^{7}$, $N_{\mathrm{CB}} \simeq 10^{6}$, $N_{\mathrm{CWDB}} \simeq 3 \times 10^{7}$, $N_{\mathrm{NB}} \simeq 10^{6}$ そして $N_{\mathrm{BH-NB}} \simeq 5 \times 10^{5}$ と見積もられる [Hils, Bender and Webbink 1990]. これらは, それぞれが重力波を放出しているが, 一つ一つは遠くて分解できないと考えられるので, それを積分すると, ある振幅の stochastic な重力波の源になる. Hils, Bender and Webbink [1990] によると $\Delta\nu = 1$ cycle y^{-1} の帯域幅で観測すると図 4-36-a のようになる.

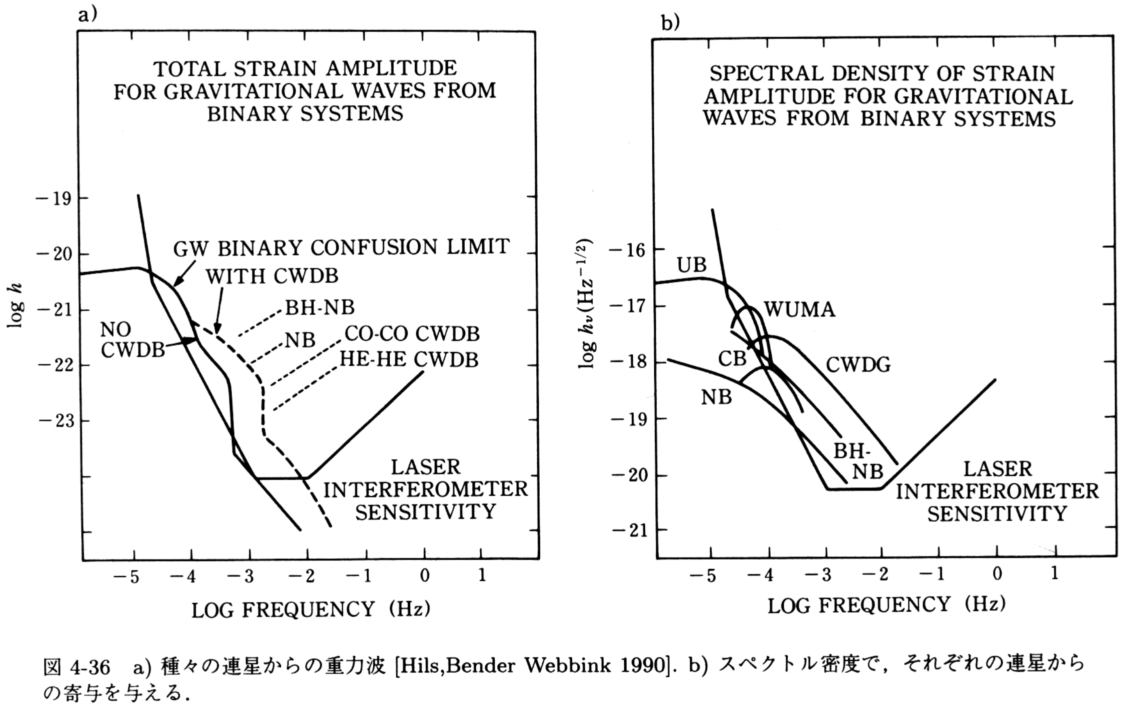


図 4-36　a) 種々の連星からの重力波 [Hils,Bender Webbink 1990]. b) スペクトル密度で, それぞれの連星からの寄与を与える.

スペクトル密度では図 4-36-b のように UB, CB, NB, CWDB, W UMa 等が寄与している. しかし, 近くの連星はそれぞれを分解して見ることができるかも知れない. 例えば iBoo と μSco はそれぞれ 0.09 mHz と 0.02 mHz で $h \sim 10^{-20}$ の重力波を放出しているはずである [Evans, Iben and Smarr 1987]. iBoo と μSco からの重力波は図 4-36-a より連星による stochastic なバック

グラウンド重力波より振幅が高いので，検出される可能性がある．このような，重力波は他にもSSCYG, WZS, AMCVN といった連星がある．もちろん PSR1913+16 のような連星パルサーもその候補である．ただ，第 5 章以降で論じられるが，これらの重力波源からの重力波の振動数は $f \sim 1$ Hz 以下なので，地上で装置を作る限り，f^{-2} に比例して低振動数側で増大する地面振動の方が大きくなってしまう．観測装置は宇宙空間に作る必要があるが，これは補遺 B で論じられる．

4-5-4 大質量ブラックホールと重力波

この mHz 領域の別な重要な重力波源としては，超大質量ブラックホールの形成とか連星ブラックホールの合体がある．第 1 章でいくつかの銀河の中心に $10^6 \sim 10^8 M_\odot$ のブラックホールがあること，また QSO (Quasi Stellar Object) は $\sim 10^8 M_\odot$ 程度のブラックホールにガスが落下しているための活動的現象であると考えられることを説明した．このようなブラックホールが 4-2 節で説明したように (図 4-16) 形成されたとすると，準固有振動数は質量に逆比例するのでブラックホールの質量を M として (4-54) より

$$f \sim 10^{-3}\mathrm{Hz}\left(\frac{M}{10^8 M_\odot}\right)^{-1} \tag{4-162}$$

となる．また，振幅は図 4-16 に対応して $r(\sim 1\mathrm{Gpc})$ とすると

$$h \sim 10^{-15}\left(\frac{M}{10^8 M_\odot}\right)\left(\frac{r}{1\mathrm{Gpc}}\right)^{-1} \tag{4-163}$$

となる．このような大質量ブラックホールの連星の合体も考えられている [Begelman, Blandford and Rees 1980]．もし，楕円銀河が渦状銀河の合体でできたとすると，渦状銀河の中心にある大質量ブラックホールも連星になる可能性がある [Fukushige, Ebisuzaki and Makino 1992]．この描像では，大質量ブラックホールの合体は，年に 1 回程度起こっている可能性がある．(3-149) で $a_0 = 10^8(GM_\odot/c^2)x$ とおくと

$$t_\mathrm{c} = 9.7s \cdot x^4 \left(\frac{m_1}{10^8 M_\odot}\right)^{-1}\left(\frac{m_2}{10^8 M_\odot}\right)^{-1}\left(\frac{m_\mathrm{t}}{10^8 M_\odot}\right)^{-1} \tag{4-164}$$

となる．$x \sim 40$ の時には $t_\mathrm{c} \sim 1\mathrm{yr}$ となる．重力波の振動数 f は

$$f = 6.4 \times 10^{-4}\mathrm{Hz}\ x^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{m_\mathrm{t}}{10^8 M_\odot}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4-165}$$

で与えられ，振幅 h は (3-84) より距離 r を Gpc 単位で測って

$$h \sim 10^{-14}\ x^{-1}\left(\frac{m_1}{10^8 M_\odot}\right)\left(\frac{m_2}{10^8 M_\odot}\right)\left(\frac{r}{1\mathrm{Gpc}}\right)^{-1} \tag{4-166}$$

となる．$x \sim 10$ とすると，$t_\mathrm{c} \sim 10^5$s, $f \sim 2 \times 10^{-5}$Hz, $h \sim 10^{-15}$ となる．

さて，$M = 10^6 \sim 10^8 M_\odot$ のブラックホールにその周辺にある $M \sim 1\ M_\odot$ の星が落下した時にも重力波の放出が期待できる [Hils and Bender 1995]．この場合は，例えば Oohara and Nakamura [1984] による摂動計算が十分よい近似と考えられる．Hils and Bender [1995] によると M32 という銀河の場合，イベント率は 5×10^6y に 1 回程度でブラックホールの質量を $10^6 M_\odot$ としたとき期待される重力波の振幅 h は $10^{-23} \sim 10^{-22}$ であり，振動数 f は $10^{-3} \sim 10^{-2}$ Hz となる．

4-5-5　宇宙論的バックグラウンド重力波

本節では, 宇宙論について予備知識を必要とするので, 宇宙論については, 例えば Kolb and Turner [1989] を読んでもらうことにする. 宇宙論的な重力波を論じるのには, よく $\Omega_g(f)$ という量が用いられる. H_0 を現在のハッブルパラメータとすると $\Omega_g(f)$ は宇宙が開いているか閉じているかを決める臨界的なエネルギー密度 $\rho_{\rm c} = 3H_0^2c^2/8\pi G$ と振動数 f の重力波のエネルギー密度 $\rho_{\rm g}$ の比で具体的には

$$\Omega_{\rm g}(f) = \frac{8\pi G}{3H_0^2c^2}\frac{{\rm d}\rho_{\rm g}}{{\rm dln}f} \tag{4-167}$$

である. 重力波の振幅 $h_{\rm c}(f)$ と重力波のエネルギー密度との関係は (3-86) を使って

$$\rho_{\rm g} = \frac{c^2h_{\rm c}^2(2\pi f)^2}{32\pi G} \tag{4-168}$$

となるから, (4-168) より $\Omega_{\rm g}$ を与えると $h_{\rm c}$ は $H_0 = 80{\rm kms^{-1}Mpc^{-1}}$ として

$$h_{\rm c} = 1.5\times 10^{-20}\sqrt{\Omega_{\rm g}}\left(\frac{f}{100{\rm Hz}}\right)^{-1} \tag{4-169}$$

となる. さて, 宇宙論的なバックグラウンド重力波は, 2 つのカテゴリーにわかれる. 第 1 のカテゴリーに寄与するの今まで論じてきた重力波の源の和である. 第 2 のカテゴリーに属するものは, 宇宙論に特有な重力波である. 例えば, インフレーション, 相転移に伴う重力波などがそれである. 第 1 のカテゴリーに属するものの例は初期宇宙での $10M_\odot \sim 10^8M_\odot$ のブラックホール形成で, $\Omega_{\rm g} = 10^{-5} \sim 10^{-1}$, $f = 10^{-7}$ Hz $\sim$ 1 kHz である [Carr 1980]. もちろん, このような重力波の存在は, ある種のシナリオに基づくもので, 確実に存在すると言っているわけではない.

宇宙論的な重力波の源については, もし, それが宇宙初期の元素合成の時期 (いわゆる最初の 3 分間) に存在したとすると, $\Omega_{\rm g}(f)$ に次のような制限が生じる. 元素合成時期に $\Omega_{\rm g}(f)$ があると, エネルギー密度が増えるために, 宇宙膨張が早くなってしまう. これは, 何も $\Omega_g(f)$ に限ったことではなく, ニュートリノでも同じである. 宇宙初期の元素合成時には, $T \sim {\rm MeV} \gg m_\nu$ なので He, D, Li の量が観測値と無矛盾であるためにはニュートリノの種類は, 3 種類以上ではありえないという制限がついている [Walker, Steigman, Schramm, Olive and Kang 1991]. これより重力波のエネルギー密度も宇宙初期の元素合成時にはせいぜいニュートリノや輻射と同じエネルギー密度 $\Omega_{\rm r}$ しか持てない. 重力波は宇宙膨張に対して電磁波と同じように振舞う (式 (2-128) と (2-132)). したがって $\Omega_{\rm r}$ を現在の輻射のエネルギーの臨界密度に対する割合として

$$\Omega_{\rm g}(f) < \Omega_{\rm r} = 4\times 10^{-5} \tag{4-170}$$

となる. 一方第 1 のカテゴリーのバックグラウンド重力波は, 宇宙初期の元素合成の後に生成されるので式 (4-170) の制限は適用されない.

宇宙には 2.75 K の宇宙背景輻射が存在している. 電磁波に対応した重力波の背景輻射も考えられる. 重力波が物質と輻射平衡にあるのはプランク時間 ($=\sqrt{G\hbar/c^5}$) である. この時温度は $T \sim 10^{19}$ GeV であるので, 大半の粒子は実質的に質量ゼロである. この後, 温度が下がると, 粒子はつぎつぎに対消滅して輻射になる. 従って, 現在の重力波の背景輻射は, 2.75 K ではなく 0.9 K で $\Omega_{\rm g}^B \simeq 10^{-7}$ である. 振動数 $f \sim 10^{10}$ Hz であるので $h_{\rm c} \sim 10^{-32}$ となる.

ところが，もし宇宙のインフレーション説 [Guth 1981] が正しいとすると，急激な指数関数的な宇宙膨張のため 0.9K の背景重力波は存在しないことになる．そのかわり，インフレーション時期に量子揺らぎに起因した振幅 $h = 2H/\sqrt{\pi}m_{\rm pl}$ の重力波が波長によらずに発生する．ここで，H はインフレーション時のハッブルパラメータで $m_{\rm pl}$ はプランク質量 ($= \sqrt{\hbar c/G}$) である．宇宙は，その後ある温度 $T_{\rm RH}$ (再加熱温度) でインフレーションが終了すると考えられている．そこで考えている波長の重力波が，1) 再加熱時に，すでにホライズンに入っているかどうか，2) 輻射優勢時にホライズンに入っているかどうかでその後の振舞がかわる．その結果，$10^{-7}(T_{\rm RH}/{\rm GeV})^{-1} < \lambda < 16$ Mpc では $\Omega_{\rm g} = 10^{-5}(H/m_{\rm pl})^2$ であり $\lambda > 16$ Mpc では λ^2 に比例して増大し $\lambda < 10^{-7}(T_{\rm RH}/{\rm GeV})^{-1}$ では λ^2 に比例して減少する．これを図にすると $T_{\rm RH} = 3 \times 10^{10}$ GeV の場合，図 4-37 のようになる．

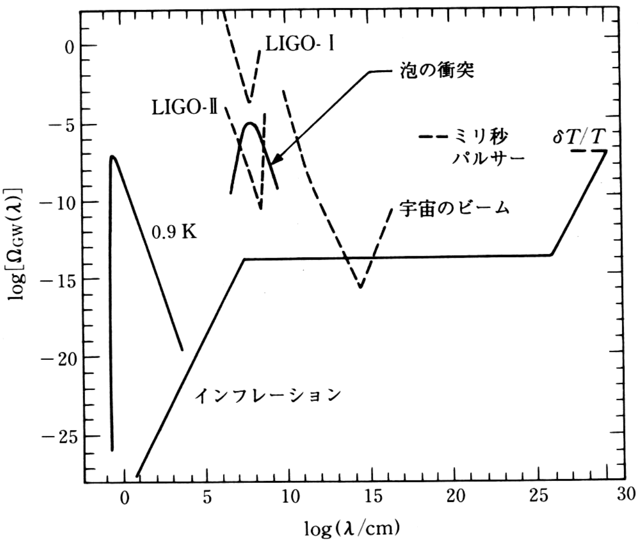


図 4-37　宇宙論的バックグラウンド重力波．インフレーション，Extended Inflation，そして 0.9 K 背景重力波を示している [Tuner and Wilczek 1990].

さて，Guth [1981] によるインフレーション説には問題点があった．偽真空の中に本当の真空が泡となってできるのだが，この泡の発生率が特別な値をとらないと宇宙は現在の宇宙にならないか，それともインフレーションを起こさないのかということになった．これを回避するために，様々なインフレーション説 (new インフレーション説，chaotic インフレーション説，extended インフレーション説，soft インフレーション説，powerlaw インフレーション説，…… Kolb and Turner [1989] を参照) が提案された．この中で第 8 章で説明のあるブランス-ディッケ理論を使った La and Steinhardt [1989] による Extended Inflationary Cosmology では，発生した本当の真空の泡同志がぶつかるので，この時に重力波が発生する．その結果 $\Omega_{\rm g} \sim 10^{-5}$, $\lambda \sim 10^8$ cm したがって，$h \sim 10^{-22}$ の重力波が存在している可能性がある (図 4-37, Turner and Wilczek [1990]) ．もし，このような重力波が観測されたら，我々は，宇宙が始まってから 10^{-22} 秒の様子を直接観

測できることになるのである．これは重力波以外の手段ではほとんど不可能である．

もともと，インフレーション説は１次相転移ないしは２次相転移と考えられたのであるが，宇宙が冷えていくとともにインフレーション以外にも数々の相転移が起こった可能性がある．それらは GUT (Grand Unified Theory)，電弱相転移，QCD (Quantum Chromo Dynamics) 相転移である．これらの相転移時に発生した圧力の揺らぎは，重力波を発生しうる．例えば Hogan [1986] によると QCD 相転移では $h \sim 10^{-17}, f \sim 10^{-8}$ Hz の重力波が，また，電弱相転移では $h \sim 10^{-20}, f \sim 10^{-6}$ Hz の重力波が期待できることを論じている．QCD 相転移の場合は Witten [1984] も論じているし１次相転移一般については Kosowsky, Turner and Watkins [1992] の議論がある．しかしながら最近の QCD モンテカルロ計算によると QCD 相転移は１次相転移ではないのではないかという傾向になっている [Fukugita and Hogan 1991, Martinelli 1994].

GUT 相転移にともなって紐状のトポロジカル欠陥が生じる可能性も指摘されている [Zel'dovich 1980, Vilenkin 1981]．このトポロジカル欠陥はコスミックストリング (Cosmic String) と呼ばれており，その線密度は $10^{22}\mathrm{g\,cm^{-1}}$ 程度であってこれが密度揺らぎの種となって銀河形成が起こるというのがコスミックストリングによる銀河形成理論の特徴であった．コスミックストリング自身は振動しており最終的には重力波を放出して消滅する．Vilenkin [1981] によるとコスミックストリングによる重力波の $\Omega_{\mathrm{g}}(f)$ は $10^{-11}\mathrm{Hz} \leq f \leq 10^{8}\mathrm{Hz}$ で $\Omega_{\mathrm{g}}(f) \sim 3 \times 10^{-7}$ である．コスミックストリングによる重力波は多くの研究者によって研究されてきたが [レビューとして Vilenkin 1985]，観測的には Kaspi, Taylor and Ryba [1994] による PSR1855+09 と PSR1937+21 のパルサータイミングからは $\Omega_{\mathrm{g}}(f) \leq 10^{-7}, f \sim 10^{-8}$ Hz となっており，コスミックストリングによる銀河形成理論には厳しい情勢になっている． （ここでは，電磁波の背景輻射の揺らぎに寄与するような長波長重力波＝揺らぎのテンソルモードは考えなかった．これについては第８章で述べられる．）

第5章 ・ 検出対象と方法

この章では第4章で解析された重力波源に対して, どのような検出法があるかを解説する.

5-1　重力波検出の一般論

重力波検出の原理は, ひとことで言えば, 測長である. 重力波は時空の波であり, その影響は時空の変動となって現れる. 具体的には, それは物の伸縮であったり, 2点間の距離の変化 (見方を変えれば, メトリックの変化) であったりするが, とにかくその長さの変化を捕らえれば良いのである.

まず, 物の伸縮を測るのが, 共鳴型重力波検出器である. これは弾性体振動子をアンテナとして用いる方法で, その伸縮モードの変化を測定する. 現在は, 数トンのアルミ合金製アンテナを熱雑音を抑えるためにヘリウム温度に冷却しているが, さらに低温に下げることや質量を増やすことが必要になっている. 一方, 2点間の距離の変化を測るのがレーザー干渉計やドップラートラッキング, パルサータイミングである. レーザー干渉計の検出原理は, マイケルソン–モーレーの実験と同じである. この方法が現在の主流であり, すでに世界では基線長が数 km にも及ぶレーザー干渉計の建設が始まっている. 課題は, 干渉計に打ち込むレーザー光の実効パワーを上げること, 熱雑音を抑えること, 地面振動を抑える防振性能を上げること等である. ドップラートラッキングは, 地球とスペースクラフト間の距離が重力波によって変動するのを, 電波の往復を利用して測定する方法であり, その問題点は, 使用する原子時計の精度で感度が決まってしまうことである. パルサータイミングは, 天然の超高精度時計であるパルサーの周期が, 地球に届くまでに重力波によって変調されるのを測定する方法であり, 伝搬途中のプラズマの影響が大きいことが問題である. しかし, 基本的には種々の検出方法は検出する重力波の振動数が違うので相補的である.

検出法を選ぶ場合に特に大事なのは, 目的の重力波がどの周波数帯にあるのか, ということである. 主な重力波源に関して, その典型的な周波数と波形, および検出法を示したのが表5-1である. 中性子星やブラックホールの形成は, 星の重力崩壊過程であり, 超新星爆発となって光学観測されることもある. 中性子星が生まれた場合は, 高速で回転しながらスピンダウンしてゆく重力波源になりうる. また, ブラックホールが生まれた場合は, その準固有振動が重力波を発生する.

表 5-1　重力波の周波数と波形およびその検出法

重力波源	周波数	波形	検出法
中性子星の形成	500～1kHz	バースト波	地上レーザー干渉計, 共鳴型検出器
ブラックホールの形成	$\lesssim$1 kHz	バースト波	地上レーザー干渉計
パルサー	1～1kHz	連続波	地上・月面レーザー干渉計, 共鳴型検出器
連星中性子星の合体	10～1kHz	準周期波	地上レーザー干渉計
連星の軌道放射	1Hz 以下	連続波	宇宙レーザー干渉計
大質量ブラックホール	～1 mHz	バースト波	宇宙レーザー干渉計, ドップラートラッキング
背景重力波	10^{-7}Hz	Stochastic	パルサータイミング

現在最も有望な重力波源と思われているのは, 連星中性子星の合体である. その波形はチャープ (chirp) と呼ばれ, 10Hz から 1kHz 程度まで徐々に振幅を大きくしながらスイープしてゆく準正弦波である (図 4-27). 中性子星同士が合体する最終段階ではバースト波を発生し, ブラックホールを形成するのである. コンパクトな星 (褐色わい星, 中性子星, ブラックホール) 同士の連星も重力波源となる. ただし, 一般に連星周期は長いので, 重力波の周波数はかなり低くなる. 背景重力波というのは, 以上の重力波の重ね合わせと宇宙ひも等の宇宙論的な重力波の総称である.

重力波検出の難しさは, 重力波の振幅が極端に小さいことに起因する. 重力波の振幅 (無次元歪) h は, 式 (3-45) を書き換えて

$$h \sim \frac{r_g}{r}\frac{\Delta M}{M} \tag{5-1}$$

となる. ここで r_g は天体のシュヴァルツシルト半径 (重力半径 $r_g = 2GM/c^2$), r は天体までの距離, ΔM は重力波発生に寄与する天体のエネルギーを質量に換算したものである. 太陽質量 (重力半径 3km) の 10 倍重い星を例にとれば, 銀河中心で $\Delta M = 0.01M$ の重力崩壊が起きたとしても, 重力波の振幅は高々$h = 10^{-18}$ である. つまり, 地球と月の距離が, たった数Å しか変化しないことになる. これほど重力波の影響が小さい理由は, 重力相互作用が弱いことである. よく使われる比較であるが, 電磁相互作用の強さを表す微細構造定数 $e^2/\hbar c$ と重力相互作用の強さを表す定数 $G{m_p}^2/\hbar c$ は 36 桁も違うのである (m_p は陽子の質量数). さらに, 重力波検出の難しさは, その発生頻度にも関係している. 表 5-1 には重力波の大きさと発生頻度を書いていないが, それは, どちらも重力波源までの距離に大きく依存しているからである (詳しくは第 4 章を参照). つまり, 銀河中心に重力波源があれば $h = 10^{-18}$ ほどにも大きくなる可能性があるが, 発生頻度は数百年に一度と非常に小さいものになってしまう. とはいえ, どんな検出器も重力波を観測する確率がゼロとは言えず, 近距離で激しい天体現象が起こる幸運を夢見ながら, 開発が続けられているのである.

検出器を開発する上での困難としては, 非常に微弱な信号を検出するために, ありとあらゆる雑音を抑えなければならないことがある. 通常の観測機器開発では, 1 つの雑音を 1 桁改善することができれば, 装置の感度を 1 桁上げることが可能である. これに対し, 重力波検出器開発では, 全ての雑音を一斉に改善しなければならないのである. また, 地面振動などの環境雑音や熱雑音も遮断しなければならないので, より一層の困難がつきまとうことになる.

以下では, 共鳴型重力波検出器, レーザー干渉計, ドップラートラッキング, パルサータイミングの順でそれぞれの検出方法を解説してゆくことにする. 現在の主流であるレーザー干渉計を最初にしない理由は, 重力波検出への挑戦の端緒を開いたという, 歴史的に意義の大きい共鳴型

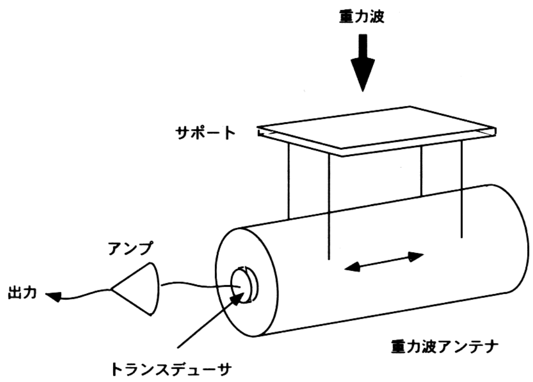


図 5-1　円柱型重力波アンテナと振動モード

に敬意を表するためである.

5-2　共鳴型重力波検出器

共鳴型重力波検出器の原理は, 弾性振動子に外力として加えられる重力波によって引き起こされる振動を検出するというものである. 特徴は, レーザー干渉計等に比べて非常に単純なので安定した連続運転が可能なことである. 原理的に振動子の共振点付近にのみ感度を持つため観測帯域が狭いが, 連続波を検出するときには逆に利点ともなる.

5-2-1　重力波と弾性振動子の相互作用

弾性体の内部の位置を $\mathbf{x}$, 変位を $\mathbf{u}$ とすると, この弾性体の自由振動は

$$\rho\ddot{\mathbf{u}} - \mu\Delta\mathbf{u} - (\lambda+\mu)\mathrm{grad\ div\ }\mathbf{u} = 0 \tag{5-2}$$

で表される. ここで ρ は密度, λ と μ はラメの定数である [平川 1986]. $\mathbf{u}(t,x)$ を弾性体の振動モード $\mathbf{w}_n(x)$ で展開すると,

$$\mathbf{u}(t,x) = \sum_n \xi_n(t)\mathbf{w}_n(x) \tag{5-3}$$

と表せる. ここで $\xi_n(t)$ は各振動モードの振幅である. 例えば, 共鳴型重力波検出器を代表する円柱型アンテナの場合, 重力波検出に適した振動モードは図 5-1 に示す軸方向の伸縮モードである. このモードの振幅を計算する前に以下の準備が必要である.

まず全質量 M

$$M = \int \rho \mathrm{d}V \tag{5-4}$$

に対し, モードの換算質量 μ は

$$\mu \equiv \int \rho|\mathbf{w}_n(x)|^2\mathrm{d}V \tag{5-5}$$

と定義される. 例えば円柱の伸縮モードの場合 $\mu = M/2$ となる. 次に, 重力波が弾性体に及ぼす力 $f_{\mathrm{GR}}(t)$ は図 5-2 に示すような潮汐力であり (式 (2-162))

$$f_{\mathrm{GR}}(t) = \frac{1}{4}\ddot{h}_{ij}(t)q^{ij} \tag{5-6}$$

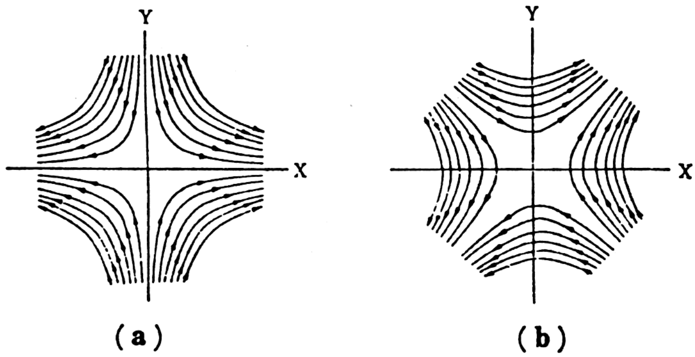


図 5-2　重力波が及ぼす力．45° ずれた (a)h_+ と (b)$h_\times$ モードがある．

と表すことができる．ここで $h_{ij}(t)$ は時空の歪みである．この力と有効に相互作用するアンテナの動的 (振動に伴って変化する) 四重極能率 q^{ij} が重要であり，以下のように定義される．

$$q^{ij} \equiv \int \rho \left(x_i w_j + w_i x_j - \frac{2}{3}\delta_{ij} \sum_k x_k w_k \right) \mathrm{d}V \tag{5-7}$$

また，アンテナの実効面積 A_G は

$$A_\mathrm{G} = \sum_{i,j} \frac{2 q^{ij\,2}}{M\mu} \tag{5-8}$$

と表される．A_G はアンテナの形状に固有の量であり，座標の取り方に左右されない．長さ ℓ の円柱の場合は $A_\mathrm{G} = (128/3)(\ell/\pi^2)^2$ となる．

重力波が z 方向から入射しているとき，TT ゲージを使うと h_{ij} は (式 (2-168))

$$h_{ij}{}^{\mathrm{TT}} = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5-9}$$

となる．また q^{ij} は

$$q^{ij} = \frac{8}{3} \frac{M\ell}{\pi^2} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1/2 & \\ & & -1/2 \end{pmatrix} \tag{5-10}$$

と計算されるから，式 (5-6) は

$$f_\mathrm{GR}(t) = \mu \ell_\mathrm{eff} \ddot{h}_+ \tag{5-11}$$

となって，かなりわかりやすくなる．ここで簡単のため $\ell_\mathrm{eff} = 2\ell/\pi^2$ とした．

以上より，共振周波数 ω_0 のモードの振幅 $\xi(t)$ は，次の調和振動子の強制振動の方程式に従うことがわかる．すなわち

$$\mu \left(\ddot{\xi} + \frac{\omega_0}{Q_0} \dot{\xi} + {\omega_0}^2 \xi \right) = f_\mathrm{GR}(t) \tag{5-12}$$

で ξ が与えられる．ここで Q_0 は弾性体の機械的な Q 値であり，共振の鋭さを表す量である．単色波 $h_+(t) = h_0 \sin \omega t$ の場合は，$\xi(t) = \xi_0 \sin(\omega t + \phi_0)$ とすると

$$\xi_0 = \frac{\ell_{\mathrm{eff}} \omega^2 h_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0{}^2)^2 + \left(\frac{\omega_0 \omega}{Q_0}\right)^2}} \tag{5-13}$$

$$\tan \phi_0 = \frac{\omega_0 \omega}{Q_0(\omega^2 - \omega_0{}^2)} \tag{5-14}$$

となる．当然のことながら，重力波の周波数と共振周波数が一致した場合 $(\omega = \omega_0)$ に振幅は最大となり，

$$\xi_0 = Q_0 \ell_{\mathrm{eff}} h_0 \tag{5-15}$$

である．この結果より，共鳴型では単色重力波の振幅が大体 Q_0 倍されることがわかる．

円柱型重力波アンテナのアンテナパターン (指向性) については，重力波の偏波 h_+ および $h_\times$ に対してそれぞれ F_+, $F_\times$ とすると

$$F_+ = \sin^2 \theta \cos 2\phi \tag{5-16}$$

$$F_\times = \sin^2 \theta \sin 2\phi \tag{5-17}$$

である [Thorne 1987]．この 2 乗和が重力波のエネルギー流に対する指向性 $f(\theta, \Phi)$ であり，

$$f(\theta, \Phi) = \frac{15}{8} \sin^4 \theta \tag{5-18}$$

となる．ここで係数 15/8 は

$$\int f(\theta, \Phi) \mathrm{d}\Omega = 4\pi \tag{5-19}$$

とするための規格化定数である [Hirakawa et al. 1976].

5-2-2　信号処理

前項では話をわかりやすくするため，重力波が入射した時の振幅を計算したが，バースト波検出で実際に測定するのはアンテナのエネルギー変化 $D(t)$ である．これを計算するために，下に示す複素振幅 $Z(t)$ を導入する [平川 1984].

$$\xi(t) = \mathrm{Re}[Z(t) \exp(-\mathrm{i}\omega t)] \tag{5-20}$$

$$Z(t) = X(t) + \mathrm{i}Y(t) \tag{5-21}$$

アンテナに取り付けたトランスデューサーの出力を，位相が 90° ずれた参照信号 (周波数=$\omega_0/2\pi$) とともにロックインアンプ (積分時間 τ_{P}) に入力し，その出力を τ_p 秒ごとに記録すれば $X(t)$ と $Y(t)$ が取得できる (図 5-3 参照).

$$\xi(t) = \frac{1}{\mu\omega} \int_{-\infty}^{t} \exp\left[-\frac{\omega_0(t-s)}{2Q_0}\right] \sin \omega(t-s) f_{\mathrm{GR}}(s) \mathrm{d}s \tag{5-22}$$

$$Z(t) = \frac{\sqrt{2}}{\tau_{\mathrm{P}}} \int_{-\infty}^{t} \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_{\mathrm{P}}}\right) \exp(\mathrm{i}\omega s) \xi(s) \mathrm{d}s \tag{5-23}$$

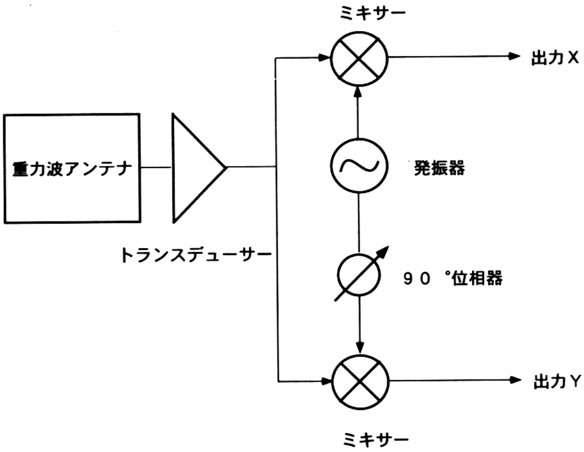


図 5-3　重力波アンテナの信号処理の流れ

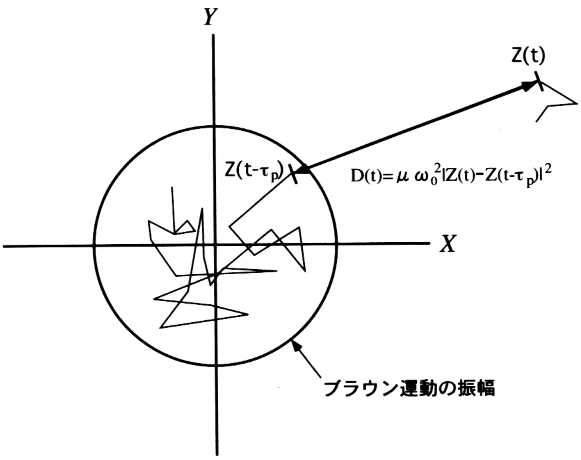


図 5-4　アンテナの複素振幅とエネルギー変化の関係

この信号処理は継続時間 τ_{P} のパルス状の外力に対しての最適フィルターに近い．こうして取得した複素振幅 $Z(t)$ から $D(t)$ は

$$D(t) = \mu\omega_0{}^2|Z(t) - Z(t - \tau_{\mathrm{P}})|^2 \tag{5-24}$$

と計算される．この信号処理は, 式の形からデルタゼットのアルゴリズムと言われている．これを示したものが図 5-4 である．$D(t)$ が急に雑音レベルより大きくなれば, それが重力波信号の到来を示すことになる．

一方, 連続波の場合は積分時間を長くする, つまりバンド幅を狭めてゆけばよい．なぜならば, 信号はデルタ関数的なスペクトルを持つからである．この時, 外力が無ければ $Z(t)$ はランダムウォークをするが, 信号があると一方向に向かってだんだん成長してゆく．したがって, この場合はアンテナに働く力を測定すればよいことになる．

5-2-3　雑　音

共鳴型重力波検出器における雑音としては, アンテナの熱雑音つまりブラウン運動と, トランスデューサーの雑音がある．まず熱雑音であるが, 温度 T_{M} の熱浴に接した調和振動子は

$$\mu\omega_0{}^2 < \xi_{\mathrm{B}}^2 >= k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{M}} \tag{5-25}$$

の式に従うブラウン運動をする．ここで k_{B} はボルツマン定数である．揺動散逸定理に従い, この雑音を力で表すと

$$< f_{\mathrm{B}}{}^2 >= \frac{4\mu\omega_0 k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{M}}}{Q_0} \tag{5-26}$$

となる．また, トランスデューサーの雑音には信号をマスクする等価雑音変位 $\sqrt{< \xi_{\mathrm{n}}{}^2 >}$ とアンテナに与える反作用としての等価雑音力 $\sqrt{< f_{\mathrm{n}}{}^2 >}$ がある．これらは増幅器で言えば電圧性雑音と電流性雑音に相当するもので, それと同様に雑音温度 T_{n} とマッチング係数 η を次のように定義できる．

$$T_{\mathrm{n}} \equiv \frac{\omega_0 \sqrt{< \xi_{\mathrm{n}}{}^2 >< f_{\mathrm{n}}{}^2 >}}{2k_{\mathrm{B}}} \tag{5-27}$$

$$\eta \equiv \frac{1}{\mu\omega_0{}^2}\sqrt{\frac{< f_{\mathrm{n}}{}^2 >}{< \xi_{\mathrm{n}}{}^2 >}} \tag{5-28}$$

η は機械系のインピーダンスと電気系の最適インピーダンスの比を表す重要なパラメータである [坪野 1983]．式 (5-23) をそれぞれの雑音力に対して計算し, 関係式 (5-24) を用いてまとめると

$$D_{\mathrm{n}} = \frac{< f_{\mathrm{B}}{}^2 > \tau}{4\mathrm{e}\mu} + \frac{< f_{\mathrm{n}}{}^2 > \tau}{4\mathrm{e}\mu} + \frac{(1-\mathrm{e}^{-1})\mu\omega_0{}^2 < \xi_{\mathrm{n}}{}^2 >}{\tau} \tag{5-29}$$

$$= \frac{k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{M}} \omega_0 \tau}{\mathrm{e} Q_0} + 2k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{n}} \left(\frac{\eta\omega_0\tau}{4\mathrm{e}} + \frac{1-\mathrm{e}^{-1}}{\eta\omega_0\tau} \right) \tag{5-30}$$

$$= k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{eff}} \tag{5-31}$$

が最終的に得られる．まず式 (5-29) で, 第 2 項と第 3 項が同じになるようにマッチング係数をとれば ($\eta\omega_0\tau = 2\sqrt{\mathrm{e}-1} \sim \mathrm{e}$), パルス状の信号に対して最適化できる．このとき,

$$D_{\mathrm{n}} \sim \frac{k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{M}}}{\eta Q_0} + k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{n}} \tag{5-32}$$

である．ここで $Q_0 \gg 1$ に注意すれば, エネルギー分解能はトランスデューサーの雑音で決まることがわかる．ただし現実には η はあまり大きく取れない ($\eta \leq 10^{-3}$)．そのため最適化条件を達成するためには積分時間 τ が 1 秒ぐらい必要で, 観測のバンド幅が非常に狭いことになる．そのため, 共鳴型トランスデューサーと言われるタイプが使われている．これはアンテナと同じ共振周波数を持つ軽い副振動子 (質量 m) をアンテナに取り付け, トランスデューサーから見たアンテナの換算質量を非常に軽くする仕掛けであり, マッチングを大幅に改善することができる．これを取り付けた場合, アンテナの共振モードは 2 つに分離し, その周波数 $\nu_{\pm}$ は,

$$\nu_{\pm} = \nu_0 \left(1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{M}} \right) \tag{5-33}$$

となる．この 2 つのモードのビート周波数 $\nu_{\mathrm{B}} = \nu_{+} - \nu_{-}$ の逆数 τ_{B} には

$$\tau_{\mathrm{B}} \leq \tau \tag{5-34}$$

という制限が付く．つまりバンド幅 $1/\tau$ を広く取るためには，副振動子はあまり軽くできないことになる．ここにトレードオフが存在する [Richard and Folker 1991]．結局，実際のバンド幅は 10Hz 程度に抑えられてしまうことになる．

トランスデューサーとしては，主に，振動によるコンデンサの容量変化を低雑音アンプで読みとる静電型が使われているが，マイクロ波共振器の共振周波数変化を読むパラメトリック型もある．この方式に関する新しい試みとして，光共振器を振動検出センサに用いるレーザートランスデューサーの開発が進んでいる [Tsubono et al. 1991, Pang and Richard 1995]．この方式では，変位雑音を大幅に下げられる可能性があるので，共鳴型重力波検出器のワイドバンド化の期待がかけられている．

5-2-4 感　　度

重力波アンテナに (θ, Φ) の方向から重力波が入射したとする．このときアンテナが受けるエネルギー E は，

$$E = \sum_{p} \frac{\pi^3 G}{5c^3} M A_{\mathrm{G}} \nu^2 f(\theta, \Phi) F^p(\nu) \tag{5-35}$$

である．ここで $F^p(\nu)$ は偏波 p の重力波のエネルギースペクトル密度であり，以下のように表される．

$$F^p(\nu) = \frac{c^3\omega^2}{16\pi G} \left| \int_{-\infty}^{\infty} h_p e^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}t \right|^2 = \frac{c^3\omega^2}{16\pi G} |H_p(\omega)|^2 \tag{5-36}$$

ここで $H_p(\omega)$ は $h_p(t)$ のフーリエ成分である．式 (5-35) を偏波に関して平均し (偏波がランダムだとする)，さらに全立体角について積分すると，

$$E = \frac{\pi^3 G}{5c^3} M A_{\mathrm{G}} \nu^2 F(\nu) \tag{5-37}$$

が得られる．バースト重力波の波形を知ることはできないが，以下のようなモデルケースを考える．

$$h(t) = \begin{cases} \sqrt{2} h_{\mathrm{rms}} \cos 2\pi \nu_{\mathrm{g}} t & |t| \leq \frac{\tau_{\mathrm{g}}}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\tau_{\mathrm{g}}}{2} \end{cases} \tag{5-38}$$

つまり，継続時間 τ_{g} の正弦波である．このとき

$$H(\omega) \sim \sqrt{2} h_{\mathrm{rms}} \frac{\tau_{\mathrm{g}}}{2} \tag{5-39}$$

となるから E は

$$E = \frac{\pi^4}{20} M A_{\mathrm{G}} \nu^4 {\tau_{\mathrm{g}}}^2 {h_{\mathrm{rms}}}^2 \tag{5-40}$$

となる．継続時間が 1 周期としたときに，この式と式 (5-32) を比べることにより，アンテナの感度 h_{rms} が

$$h_{\mathrm{rms}} = \frac{2}{\pi^2 \nu} \sqrt{\frac{10 k T_{\mathrm{eff}}}{M A_{\mathrm{G}}}} \tag{5-41}$$

と求められる．例えば，長さ 3m で重さ 2t のアルミアンテナ (共振周波数 900Hz) の場合，等価雑音温度 1mK (物理的温度は 4.2K) に対し，$h_{\mathrm{rms}} \sim 10^{-18}$ となる．

5-2-5　量子限界

式 (5-32) のように, 系全体での雑音温度を T_{eff} と表すと, 増幅器の雑音 T_{a} には

$$k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{a}} \geq \hbar\omega_0 \tag{5-42}$$

の量子限界があるから, インピーダンスを最適化した時に T_{eff} の最低値 $\sqrt{2}T_{\mathrm{a}} = \sqrt{2}\hbar\omega_0/k$ が得られる. これが共鳴型重力波検出器の標準量子限界 (SQL:Standard Quantum Limit) を与える. 例えば共振周波数が 1kHz に対して 0.1μK ぐらいになり, これは h で言えば 10^{-20} に相当する. しかし, これが感度の限界ということではない. 不確定性の関係式

$$|\Delta X \Delta P| \geq \frac{\hbar}{2} \tag{5-43}$$

において, 2 つの成分を同時に観測する場合は確かに SQL が限界感度であるが, 片方だけの成分を観測することで, 原理的にはいくらでも感度を上げることが可能なのである. 例えば, 調和振動子において

$$\hat{X}_1 = \hat{x}\cos\omega t - \frac{\hat{p}}{m\omega}\sin\omega t \tag{5-44}$$

$$\hat{X}_2 = \hat{x}\sin\omega t + \frac{\hat{p}}{m\omega}\cos\omega t \tag{5-45}$$

という変数をとれば, これは交換関係

$$[\hat{X}_i(t), \hat{X}_i(t')] = 0 \quad (i = 1, 2) \tag{5-46}$$

を満たす. このような変数は量子非破壊 (QND: Quantum Non Demolition) 観測量と呼ばれ, 任意の精度で観測することができるのである. 具体的には, 片方の変数を観測したときの反作用が, もう一方の変数にだけ影響するような系をつくれば実現できる. この方法を BAE(Back Action Evasion) と呼び, いくつかのトランスデューサーが提案されている [Bocko et al. 1983, Cinquegrana et al. 1994]. また, 位相情報を犠牲にしてエネルギーだけを観測する場合も, SQL を越えた測定が可能である (Quantum Counting).

5-2-6　極低温重力波検出器

共鳴型重力波検出器は, 超新星爆発や連星中性子星の合体等で発生するバースト重力波の検出を目的にしている. Weber により開発が始められた当初は, アルミアンテナに PZT を張り付けて, 室温で運転していた 1). その後, 熱雑音を下げるためにアンテナをヘリウム温度に冷却した第 2 世代の検出器 (表 5-2 参照) が登場した. 冷却することで, 温度を下げると同時に Q 値を非常に高くすることができ, 熱雑音は 2 桁以上改善される. 世界中の共鳴アンテナの素材となっているアルミニウム合金 Al5056 は, 日本のグループによって Q 値が高いことが見いだされた物であり [Suzuki et al. 1978], この意味での貢献は大きい. またトランスデューサーの雑音を低減化するために超伝導電流増幅器 (SQUID) や超伝導空洞共振器を動作させることができるという利点も大きい. 特に DC-SQUID は量子限界雑音を実現しつつある. ここでは, 前述の共鳴型トラ

1) Weber は 2 台のアンテナを同時観測して重力波を検出したと報告したが, 現在ではこの結果は否定されている [Weber 1969].

表 5-2　現在運転中の主な共鳴型重力波検出器

グループ (アンテナ名)	アンテナ	トランスデューサー	感度
Rome (EXPLORER)	Al, 2.3t, 0.9kHz	dc-SQUID	$4-8\times10^{-19}$
LSU (ALLEGRO)	Al, 2.3t, 0.9kHz	dc-SQUID	6×10^{-19}
UWA (NIOBE)	Nb, 1.5t, 0.7kHz	超伝導空洞	7×10^{-19}
Frascati (NAUTILUS)	Al, 2.3t, 0.9kHz	dc-SQUID	-
Legarno (AURIGA)	Al, 2.3t, 0.9kHz	dc-SQUID	-

ランスデューサーも必需品として同時に開発されている．第 2 世代の検出器は長時間安定に運転されており, 技術的には完成の域に達していて, 現在ではほぼ同じ感度 ($6\sim7\times10^{-19}$) を持つ 3 台が同時観測を行っている．同じ感度 (ここではアンテナ温度 T で表す) を持つ検出器を運転して, 信号の相関を取ることにより, 局所的な雑音 (地震など) の影響を抑えることができる．また, 例えば 2 台を同時観測すれば

$$\frac{1}{T_{\rm eff}}=\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}=\frac{2}{T} \tag{5-47}$$

と感度を上げることができる．

さらに現在では希釈冷凍機を用いてアンテナを数十 mK まで冷却する第 3 世代の検出器が開発されつつあり (表 5-2 の NAUTILUS, AURIGA), 連続運転も徐々に開始されている．目標感度は $h\sim10^{-20}$ 台である．

以上の共鳴型検出器の対象は, 星の重力崩壊により発生するバースト重力波である．星の重力崩壊は超新星爆発を引き起こし, 中性子星やブラックホールを形成する．超新星爆発が光やニュートリノで観測された場合は, たとえ 1 台しかアンテナが運転されていなくても重力波信号の同定が可能である．この場合には, 当然であるが, 重力波の伝搬速度の光速度からのずれに対して制限を与えることができる．重力波の振幅としては, 軸対称重力崩壊の場合,(4-1 節)

$$h\lesssim3\times10^{-21}\left(\frac{30\text{kpc}}{r}\right) \tag{5-48}$$

で, 周波数は 200Hz~1kHz である．しかし, 非軸対称なら式 (4-29) のような評価 ($h\sim3\times10^{-19}$(30kpc/r)) もある．式 (5-48) からは, 第 3 世代の検出器でも検出は非常に難しいと思われるが, 最近のパルサーの固有運動の測定から, 超新星爆発時の非軸対称性がかなり大きい, つまり重力波の振幅が現在の評価より高いことが示唆されている (第 4 章参照). 連星中性子星の合体の最後の 3 ミリ秒 (4-4 節) も, 共鳴型検出器の重要な重力波源である．

円柱型アンテナは指向性がかなり鋭く, 質量が数 t に限られていた．そこで新しい試みとして, 球形アンテナの開発が始まっている．球形の利点は, 重力波に対して感度を持つ弾性モードが多く存在し, これらを有効に活用することで全指向性を持たせようというアイデアである．また同じ共振周波数の円柱に比べ質量が大きくできるので感度が高くなる．具体的には質量数十 t のサッカーボールのような形をしたアンテナを極低温に冷却するという計画がある．共振周波数の異なるアンテナを何台か同時運転し (シロフォンと呼ばれている), 共鳴型の欠点である観測帯域の狭さを解決するという TIGA 計画 [Merkowitz and Johnson 1995] も提案されている．図 5-5

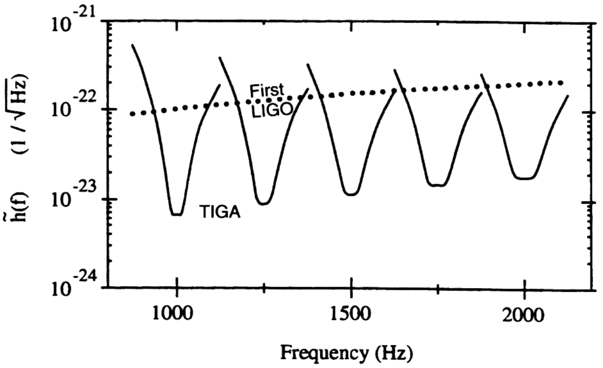


図 5-5　TIGA 計画の予想感度スペクトル．実線は球形アンテナの量子限界感度である．比較のために LIGO の感度を点線で示してある.[Thorne 1995]

が予想感度スペクトルであり, 後述するレーザー干渉計型重力波天文台に観測帯域および感度ともに匹敵するものとなっている．ただし, 異なるアンテナの出力間の位相関係を正確に定義するのは難しいので, 複数のアンテナにまたがるフーリエ積分は現実には困難であろう．

5-2-7　連続重力波の検出

ここではパルサーからの連続重力波を検出するための装置について解説する．パルサーは回転する中性子星であるが, もしそれに非対称性があれば重力波源となる (4-3 節)．パルサーの回転は非常に安定なので, そこから発生する重力波は連続波と見なせ, その周波数は回転周波数の 2 倍である．その重力波の振幅は

$$h \sim 10^{-30} \left(\frac{\epsilon}{10^{-7}}\right) \left(\frac{f}{1\mathrm{Hz}}\right)^2 \left(\frac{1\mathrm{kpc}}{r}\right) \tag{5-49}$$

で表される．ここで ϵ は回転対称からのずれを表すパラメータ, f は回転周波数, r はパルサーまでの距離である．また発生する重力波の周波数は回転周波数の 2 倍である．ϵ を推定するのは難しいが, スピンダウンレートから h を推定することはできる．例えば表 5-3 のようになる．重力波振幅の最大値はスピンダウンレートから計算されるエネルギー減少が全て重力波放出によると仮定した場合の数値であり, あまり現実的でない．表に示された 2 つのパルサーは重力波源として最も有望なものであるが, 一般のパルサーはこれより 1 桁以上振幅が小さいと推定される．これはバースト波に比べればかなり小さいが, 積分時間を長くしてゆけば, 原理的に感度はどこまでも良くなるので, 決して検出不能な値ではない．しかし問題は周波数が非常に低いことである．どちらも回転周波数は 11 ~ 30Hz, したがって重力波の周波数は 22 ~ 60Hz である．このような低い共振周波数は通常の共鳴型アンテナでは実現できないが[2)], 日本では図 5-6 に示す, 独自の形状を持つアンテナが開発された [Kimura et al. 1981]．これは中心の細いねじれバネの両端におもりをつけたもので, バネの太さ等を調整することで容易に目的の共振周波数に同調することができる．

2）最近発見された太陽系近傍のパルサー PSR0437-4715 がスピンダウンの大きいパルサーとしては唯一の例外であり, UWA の重力波アンテナによるその 4 倍波 (694.75Hz) 検出計画がある [Dhurandhar et al. 1996].

表 5-3　主なパルサーの回転周波数と重力波振幅の最大値

	周波数	距離	最大値
CRAB パルサー	30Hz	2kpc	8×10^{-25}
VELA パルサー	11Hz	500pc	3×10^{-24}

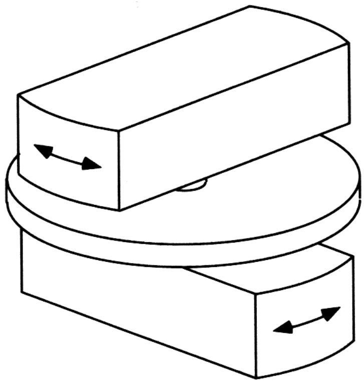


図 5-6　連続重力波検出用ねじれアンテナ．上下のおもりの間にねじれ棒があり，2 つの関係を変えることで共振周波数をかなり自由に設定できる．

次の問題は周波数の追随である．パルサーからの重力波は，発生時の周波数は安定であるが，地球の公転や自転に伴って見かけ上周波数は変化する．これを図 5-7 に示す．これにアンテナの周波数を追随させなければならない．

アンテナのバンド幅 $\Delta\omega$ は，電気系と機械系の結合常数 β を用いて

$$\Delta\omega = \beta\omega_0 \tag{5-50}$$

となるが，β は 10^{-4} 程度にしかならないので，かにパルサーに対しては数 mHz の精度で追随させる必要がある．これに対しては静電同調法 (コンデンサの両極に蓄えられた電荷間に働く引力

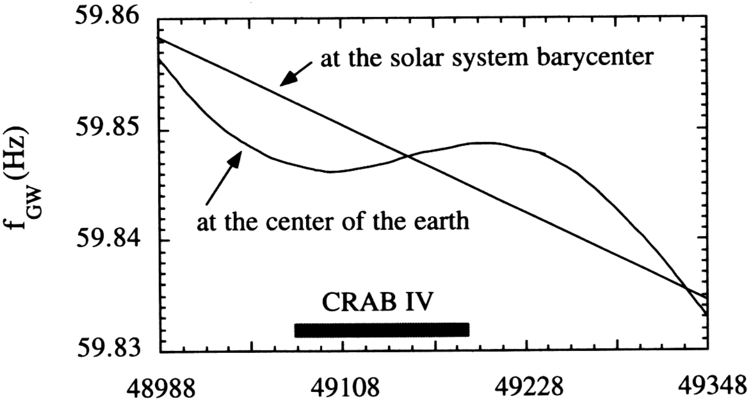


図 5-7　かにパルサーからの重力波の周波数変化．太陽系中心と地球中心での重力波の周波数 (回転周波数の 2 倍) の変化を示している．横軸は MJD(Modified Julian Date) で，CRAV-IV の観測期間も書き入れてある．

が「負のバネ」と見なせることを利用した方法) が開発され, 1 年間ぐらいは常にアンテナのバンド幅の中に信号周波数を入れておくことに成功している.

低温アンテナの Q 値は非常に高いので (10^7 以上), 突発的な励起があると, その振幅はなかなかおさまらない. これは長時間連続観測という観点からは問題が多いので, それに対してコールドダンピングという手法が開発された [Hirakawa et al. 1978;Oide et al. 1978]. これは信号対雑音 (SN) 比を一定に保ったままアンテナの Q 値を下げるものであり, 連続的に観測データを記録する場合には必須である. 具体的には, 静電型トランスデューサーのプリアンプ出力を負荷抵抗にフィードバックする方法が用いられる.

最後に感度であるが, 連続波の場合はトランスデューサーの雑音は無視できる. この場合は, アンテナが受け取るエネルギーではなく, 力を測定するのが良い. 雑音となるのはアンテナのブラウン運動である. 式 (5-6) において, $h(t) = h_0 \sin \omega_0 t$ とすれば,

$$f_{\rm GR} = -\frac{1}{2} q {\omega_0}^2 h_0 \sin \omega t \tag{5-51}$$

となる. これと式 (5-26) より

$$\frac{1}{8} q^2 {\omega_0}^4 {h_0}^2 = \frac{4\mu\omega_0 k_{\rm B} T}{Q} \frac{1}{\tau_{\rm obs}} \tag{5-52}$$

が得られる. ここで $\tau_{\rm obs}$ は積分時間である. この式を, アンテナの実効面積 A_G を用いて整理すると, 最終的に

$$h_{\rm min} = \sqrt{\frac{128 k_{\rm B} T_0}{M A_{\rm G} {\omega_0}^3 Q_0 \tau_{\rm obs}}} \tag{5-53}$$

となる [3]. 最新のデータとしては, 質量 1.2 t のアンテナ (CRAB-IV) を 4.2K に冷却して 1900 時間積分したときのものがあり,

$$h \leq 2 \times 10^{-22} \tag{5-54}$$

が得られている [Suzuki 1995].

5-2-8　天体の固有振動

天体も共鳴型アンテナと見なすことができる. 例えば地球の場合, 極方向に伸びて赤道方向には縮むという固有振動モードの周期は 53.7 分で, このモードを使って背景重力波の観測が可能である. 最新の解析としては IDA という地震計ネットワークを用いたものがあり, 背景重力波に対し $\Omega_{\rm GW}(0.31{\rm mHz}) \leq 3$ を得ている [Boughn et al. 1990]. この周波数帯の観測法として後述のドップラートラッキングがあり, そちらの方が感度が高いが, 周波数が特定できるような場合はこの方法も有効である.

5-3　自由質量型重力波検出器

この節では, 共鳴型に代わって重力波検出の主流になってきた自由質量型つまりレーザー干渉計について解説する. この検出器の最大の特徴は, 共振などを用いていないため, 重力波に対する

3) 正確には, ここでアンテナの指向性の変化 (日周変化や年周変化) を考慮しなければならないが省略した.

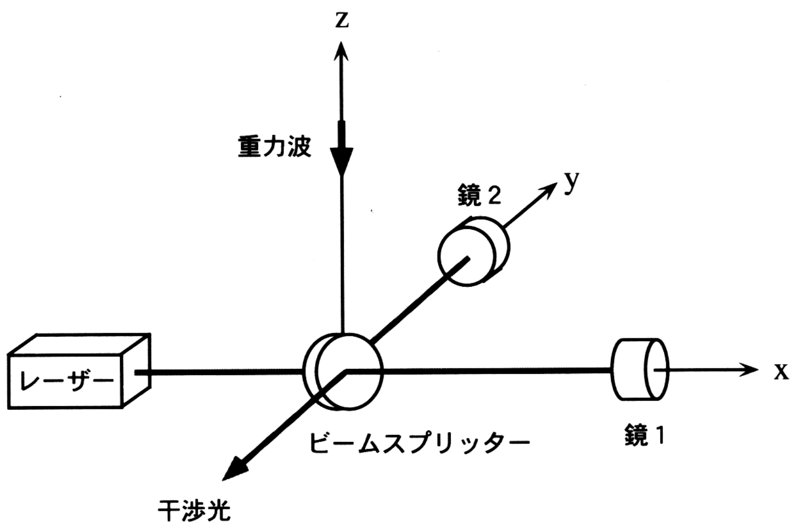


図 5-8　マイケルソン干渉計の構成

応答関数が平坦で, 観測帯域幅が広くとれることである. また, 重力波の効果は (無次元歪)×(検出器のサイズ) となって現れるので, 共鳴型に比べはるかに長い基線長をとれることも利点となる. 自由質量型と言われる理由は, 重力波の効果を見るために鏡が振り子によって吊られており, 振り子の共振周波数より高い周波数領域では「自由」になっているからである. 地球の重力を振り子で吊ることで打ち消し, 水平面内では鏡が自由落下している系だと思えばよいのである.

5-3-1　レーザー干渉計による重力波検出

図 5-8 は基本的なマイケルソン干渉計である. レーザーから入射した光はビームスプリッターで分けられ, 直交する 2 本の光路 (x 軸と y 軸) に沿って往復し, 再びビームスプリッターに戻ってくる. このとき 2 つの光に位相差があると, 干渉によって光検出器に入射する光の強度が変化する. この強度変化を測定して重力波を検出するというのがレーザー干渉計型重力波検出器である.

重力波とレーザー干渉計の相互作用を計算する場合, 2 つの描像がとれる. 1 つは固有基準座標系によるもので, 鏡が重力波による潮汐力を受けてその位置を変えるという描像である. もう 1 つは TT 座標系によるもので, 鏡の位置は変わらないが, メトリックが重力波により変化するという描像である. これを図 5-9 に示す.

もちろんどちらで計算しても結果は同じになるが, 適用範囲という意味では TT 座標系を使う方が良い. TT 座標系では, 重力波が z 軸方向から入射したときの 4 次元線素は

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}t^2 + (1+h)\mathrm{d}x^2 + (1-h)\mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \tag{5-55}$$

で表される. h は重力波によって引き起こされるミンコフスキー空間からのずれを表す. 例えば x 軸上でこれを積分すれば, 片方の腕の固有長 ℓ_1 が求められ,

$$\ell_1 = \int \mathrm{d}s = \int \sqrt{1+h}\,\mathrm{d}x \approx \int (1+\frac{1}{2}h)\mathrm{d}x \tag{5-56}$$

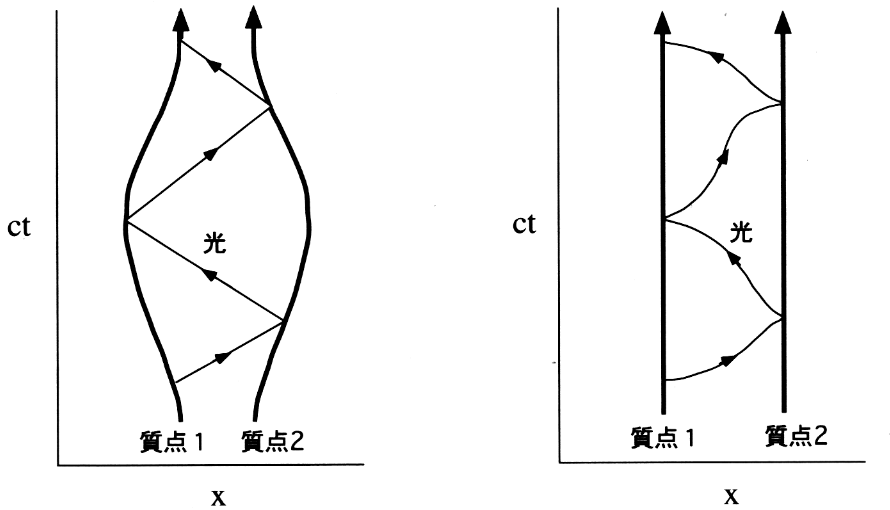


図 5-9　固有基準座標系 (重力波により鏡間の距離が変化する) と TT 座標系 (鏡の座標は一定だが, メトリックが変化する)

$$= (1 + \frac{1}{2}h)\ell_0 \tag{5-57}$$

となる．ここで ℓ_0 は重力波が無い場合の固有長である．y 軸についても同様に

$$\ell_2 = (1 - \frac{1}{2}h)\ell_0 \tag{5-58}$$

と計算できる．これら 2 つの式から, 重力波による光路長の変化 $\Delta\ell$ が

$$\Delta\ell = 2(\ell_1 - \ell_2) = 2h\ell_0 \tag{5-59}$$

と求められる．これを位相差に直すと

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta\ell = \frac{4\pi}{\lambda}h\ell_0 \tag{5-60}$$

となる．計算の過程を見れば明らかであるが, この方法が適用できるのは重力波の変化が十分にゆっくりである場合に限られる．これが TT 座標系の方が適用範囲が広いという理由であるが, 上式は一般に成り立つ．

第 6 章での TT 座標系による詳細な解析により, 最適光路長 (基線長の 2 倍) は重力波の半波長 (1kHz の時 150km) であることが示される．このような長基線を地上で実現するのは困難なため, マイケルソン干渉計の腕をファブリ-ペロー干渉計で置き換え, 光を折り返す方法が用いられる．

マイケルソン干渉計は位相差 $\Delta\Phi$ を強度変化に変換するデバイスである．光検出器の光電流 $I_{\rm PD}$ は

$$I_{\rm PD} = \frac{I_0}{2}[1 + \cos(\Delta\Phi - \Phi_0)] \tag{5-61}$$

と表せる．ここで I_0 は最大光電流, Φ_0 は初期位相である．何らかの方法により初期位相が $\pi/2$ に保たれていると, 光電流変化 $\delta I_{\rm PD}$ は

$$\delta I_{\rm PD} = \frac{I_0}{2}\sin\Delta\Phi \approx \frac{I_0}{2}\Delta\Phi \tag{5-62}$$

となって, 位相変化に比例する. これが干渉計の最終的な出力である.

この光電流変化の読み取り精度は原理的にショットノイズで決まる. 光電流のショットノイズのパワースペクトルはDC 電流 $I_{\rm DC}$ を用いて

$$< {i_{\rm n}}^2 >= 2eI_{\rm DC} = eI_0 \tag{5-63}$$

で与えられるので, 検出可能最小位相差 $\Delta\Phi_{\rm min}$ は

$$\Delta\Phi_{\rm min} = 2\sqrt{\frac{e}{I_0}} \tag{5-64}$$

となる. 実は, 干渉計の両ポートに置いた光検出器の差動信号を見てやれば, 感度は $\sqrt{2}$ 倍良くなる (差動法). 光検出器の (光電流/光パワー) の変換係数 T は, 量子効率 η を使って

$$T = \frac{\eta e}{h\nu} = \frac{\eta e\lambda}{2\pi\hbar c} \tag{5-65}$$

と表せる. 以上の式より, 重力波に対する感度は

$$h_{\rm min} = \frac{1}{2\ell_0}\sqrt{\frac{\hbar\lambda c}{\pi\eta P_0}\Delta f} \tag{5-66}$$

と書けることになる. ここで P_0 はレーザーの出力パワー, Δf は観測帯域幅である. 例えば光路長 150km (基線長 3km, 折り返し 50 回), 波長 1μm, パワー 1kW, 観測帯域幅 1kHz の時の感度は $h_{\rm min} \sim 10^{-21}$ である.

一方, レーザー光が鏡に与える光圧力の揺らぎによる雑音もあるが, これは上述のショットノイズに比べ圧倒的に小さい. 両者が一致する場合に標準量子限界 (SQL) が実現されるが, これはレーザーパワー P が

$$P_{\rm opt} = \frac{\pi c\lambda m f^2}{2} \tag{5-67}$$

を満たすときである. これは質量 m =10kg の場合, f =1kHz の重力波に対して約 5GW という途方もなく大きな値になり, このようなレーザーは現実には存在しない. つまり SQL に到達するのは困難であるが, それにもかかわらずレーザー干渉計は感度が高い. この理由を考えるために, h と $\Delta\Phi$ をフーリエ分解すると (第 6 章参照),

$$h(t) = \int h(\omega){\rm e}^{{\rm i}\omega t}{\rm d}\omega \tag{5-68}$$

$$\Delta\Phi(t) = \int h(\omega){\rm e}^{{\rm i}\omega t}H_{\rm M}(\omega){\rm d}\omega \tag{5-69}$$

となる. $H_{\rm M}$ は重力波に対するマイケルソン干渉計の応答関数であり,

$$H_{\rm M}(\omega) = \frac{2\Omega}{\omega}\sin\left(\frac{\omega\ell}{c}\right){\rm e}^{-{\rm i}\omega\ell/c} \tag{5-70}$$

と表せる. ここで Ω は光の角周波数である. この式を見ると, マイケルソン干渉計はパラメトリックゲイン Ω/ω を持つことがわかる. この値が 10^{12} のオーダーと非常に大きいことが, レーザー干渉計の感度を高くする理由なのである. 当然, さらに波長の短いX線等を用いることで感

度をかせぐという提案も生まれてくるだろう．また, SQL に到達するのは困難であるが, スクイズド光の利用によってショットノイズ限界を超えた感度を実現するというアイデアが検討されている [山本 1990]．これは, 共鳴型検出器における QND 測定にあたるものであるが, その実現は極めて難しいであろう．

その他の雑音源としては, 実質的に観測帯域の下限を決めている低周波域 (f <100Hz) での地面振動と, 観測帯域 (10< f <10kHz) に重なる鏡の熱雑音がある．観測対象が低周波帯にある場合, 十分な防振によって前者を低減しなければならない．後者については最近詳細な解析が進められ, かなり深刻な問題となってきた．解決法としては, Q 値と密度の高いサファイアを用いた鏡の製作や, 鏡をヘリウム温度に冷却する等のアイデアが出されている．つまり, 鏡の部分を共鳴型重力波アンテナにしたようなものを想像してもらうのが, わかりやすいかもしれない．

5-3-2　信号処理

重力波源としては, 星の重力崩壊 (超新星爆発) と連星中性子星の合体がある．どちらもバースト波を発生するが, 連星中性子星の合体直前の重力波形は準周期的であり, 第 4 章で示されたように解析的に求められる可能性が高い．その波形をテンプレートと呼ぶが, それを最適フィルターとして信号処理すると, バンド幅が広いレーザー干渉計は非常に感度が上がる．例えばバンド幅の中に入る重力波のサイクル数が N の場合, SN 比は $\sqrt{N}$ 倍良くなるのである．

これをもう少し詳しく考えてみる．干渉計出力 $x(t)$ は, 信号 $h(t)$ と雑音 $n(t)$ により

$$x(t) = h(t) + n(t) \tag{5-71}$$

と表される．ここで出力フィルター $k(t)$(ウィナーのフィルター) を

$$K(\omega) \equiv \frac{H(\omega)}{S_n(\omega)} \tag{5-72}$$

$$k(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K(\omega)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{5-73}$$

で定義する．ここで $H(\omega)$ は信号波形のフーリエ成分であり, $S_n(\omega)$ は雑音のパワースペクトルである．$K(\omega)$ は式の形から雑音が大きい周波数帯はカットするフィルターになっていることがわかる．このフィルターによって出力 $w(t)$ は

$$w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t-t_0)x(t)\mathrm{d}t \tag{5-74}$$

となり, SN 比は

$$\frac{S}{N} = \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{2|H(\omega)|^2}{S_n(\omega)}\mathrm{d}\omega\right]^{\frac{1}{2}} \tag{5-75}$$

と計算できる．この式を近似計算すると,

$$\frac{S}{N} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma_n}\int_0^{\infty}|H(\omega)|\mathrm{d}\omega \tag{5-76}$$

$$\approx \frac{1}{\sigma_n}\int_0^{\infty}|h(t)|\mathrm{d}t \tag{5-77}$$

となる．σ_n は雑音の標準偏差である．この式の積分の部分について考えると，同じ周波数のバースト波 (1 周期程度) と連続波に対する SN 比は，観測バンド幅が同じならば，サイクル数 N の平方根倍だけ連続波の方が良いことがわかる [Schutz 1991]．チャープ波形の場合はもう少し事情が複雑であるが，詳細な計算によれば [Thorne 1987]，N 周期分のチャープ波形を積分することにより，等価的に SN 比を $\sqrt{N}$ だけ大きくできることがわかっている．そのため，低い周波数では振幅の小さなチャープ波形に対しても，見かけ上は感度が高くなるのである．

このような信号処理が可能なのは，レーザー干渉計が非常に広い観測帯域を持つからである．合体 3 分前 (連星間距離 500km，周波数 20Hz) から観測できるとすれば，N は 2500 にもなるので (4-4-2 項)，実質的な感度を 50 倍も上げることができる．つまり，連星中性子星の合体という天体現象はレーザー干渉計にとって格好の標的なのである．$h = 3 \times 10^{-22}$ の感度があれば，200Mpc の距離での連星中性子星の合体が検出可能である．これは大体 1 年に 3 回ぐらいの頻度で発生すると見積もられており (4-4-1 項)，21 世紀初頭には地上レーザー干渉計によって重力波天文学の扉が開かれるだろう．また，これを観測することで，中性子星の質量や距離が決定でき，さらにはハッブル定数まで決められるかもしれない (4-4-2 項)．

レーザー干渉計にとって他の有望な重力波源としては，重力波を輻射しながらスピンダウンしてゆく生まれたての中性子星がある．重力波形としては，チャープ波形の時間反転を想像するのがわかりやすいであろう (4-3 節)．この重力波に対しては，共鳴型による検出も試みられているが，共鳴型トランスデューサーや静電同調等の技術をフルに活用してもバンド幅があまり広くとれず，十分な積分時間を得ることができない [赤坂 1990]．

5-3-3　地上重力波天文台ネットワーク

現在建設が始まっているキロメートルクラスの基線長を持つ重力波天文台には LIGO 計画 [Abramovici et al. 1992] と VIRGO 計画 [Bradaschia et al. 1992] がある．前者はアメリカの東西両海岸 (ワシントン州とルイジアナ州) に基線長 4km のレーザー干渉計を 2 台建設する計画で，Caltech と MIT の共同計画となっている．重力波を観測するためには最低 2 台のレーザー干渉計を設置して相関をとる必要がある．そのため，なるべく離れた土地に建設することを決めており，実際にベースラインは 3000km 程度ある．この条件の下で，重力波源の方向の不定性は幅 1° の環状になる．すでにワシントン地区の整地作業は終了しており，2000 年の運転開始に向けて建設が進められることになる．目標感度は 200Mpc 以内で起きる連星中性子星の合体を観測できる $h_c = 3 \times 10^{-22}$ であり，感度スペクトルは図 5-10 に示されるものである [Thorne 1995]．

LIGO を構成するレーザー干渉計は実は 3 台ある．最後の 1 台はワシントン州の検出器の真空槽中に設置される基線長 2km のレーザー干渉計である．これは局所相関を取るためのもので，LIGO の相関処理は最終的に図 5-11 に示すものになる [Raab 1995]．

後者はイタリアとフランスの共同計画で，イタリアのピサに基線長 3km のレーザー干渉計を建設する．こちらも LIGO と同時期の観測開始を予定している．VIRGO の特徴は，図 5-12 のような多段 (7 段) 防振系により，低周波での感度を良くしようという試みである．LIGO と VIRGO での重力波の到達時刻を比べれば，重力波源の方向が，角度で数 10 分 × 数度の不定性で決まることになる．

ここで，世界各地で開発中のレーザー干渉計プロトタイプを表 5-4 にまとめておく．中でも

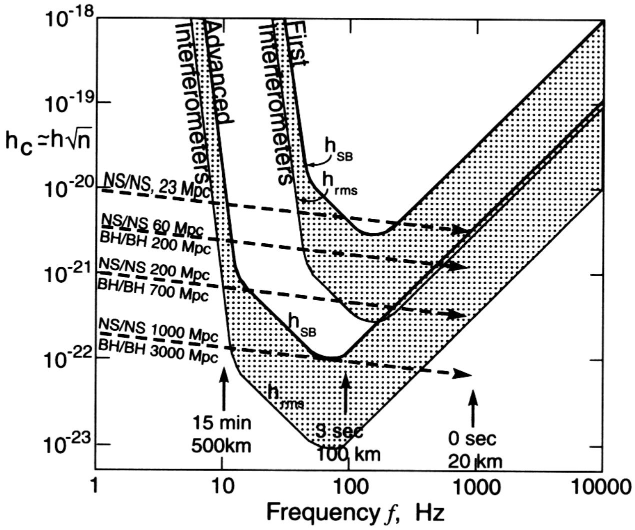


図 5-10　LIGO の予想感度スペクトル．重力波源として連星中性子星の合体を想定している.[Thorne 1995]

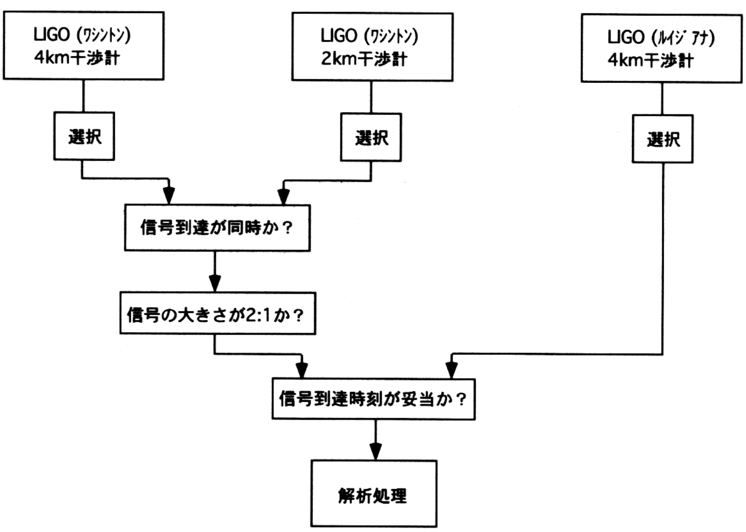


図 5-11　LIGO の相関処理のアルゴリズム

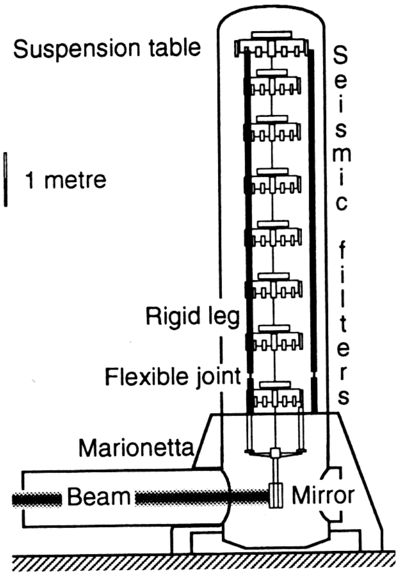


図 5-12　VIRGO で使われる多段防振系 [Ciufoline and Fidecaro 1997]

表 5-4　レーザー干渉計プロトタイプ

機関	基線長	方式	感度 $(1/\sqrt{\mathrm{Hz}})$
Caltech	40m	Recombined Fabry-Perot	(6×10^{-21})
MIT	5m	Power Recycling	-
Glasgow Univ.	10m	Locked Fabry-Perot	7×10^{-20}
Max Planck Inst.	30m	Dual Recycling	(1.1×10^{-19})
宇宙科学研究所	100m	Delay-Line	2×10^{-18}
国立天文台	20m	Recombined Fabry-Perot	2×10^{-18}

Caltech の 40m プロトタイプは, フィネスを高くすることによって $(\mathcal{F} \sim 10^4)$, 非常に高い感度を実現した. 日本でも 2 台のプロトタイプが運転を開始しており, 宇宙科学研究所の 100m プロトタイプでは長時間連続運転できるようになっている. また, 国立天文台の 20m プロトタイプは, リサイクリング可能な直接干渉に成功しており, これからリサイクリングを組み込んで感度を上げてゆく予定である (7-6 節).

重力波天文台ネットワークについては, その配置が非常に大事である. 重力波源の方向を決めるためには何台のレーザー干渉計が必要であろうか？ここで図 5-13 のような座標系と 3 台のレーザー干渉計 (A,B,C) の配置を考える.

重力波源の方向は, ベクトル $\mathbf{k}$

$$\mathbf{k} = -(\cos\Phi\sin\Theta, \sin\Phi\sin\Theta, \cos\Theta) \tag{5-78}$$

で表されるから, 重力波の到達時刻をそれぞれ t_{A}, t_{B}, t_{C} とすれば,

$$L\cos\Phi\sin\Theta = c(t_{\mathrm{A}} - t_{\mathrm{B}}) \tag{5-79}$$

$$L\sin\Phi\sin\Theta = c(t_{\mathrm{A}} - t_{\mathrm{C}}) \tag{5-80}$$

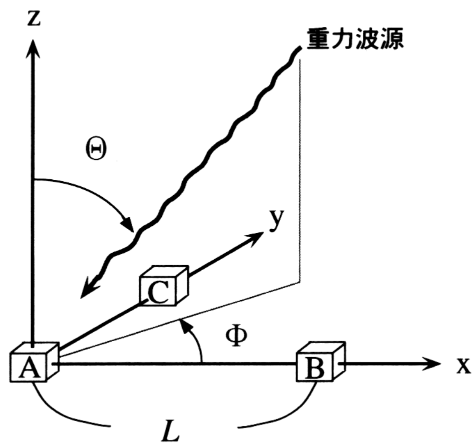


図 5-13　3 台のレーザー干渉計 A,B,C と重力波源の方向

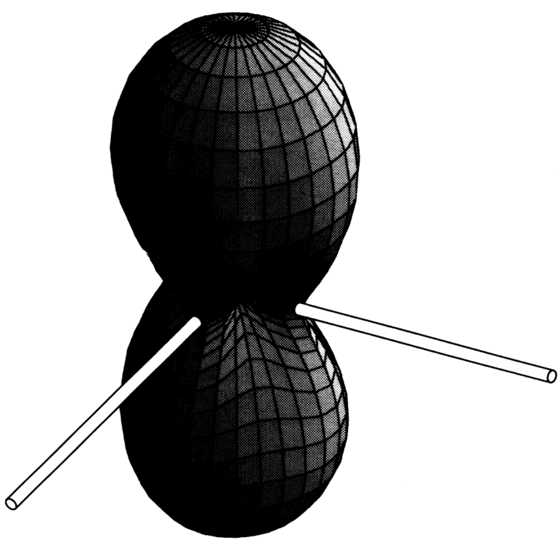
となる．これより，

$$\tan\Phi = \frac{t_{\rm A} - t_{\rm C}}{t_{\rm A} - t_{\rm B}} \tag{5-81}$$

$$\sin\Theta = \pm\frac{c}{L}\sqrt{(t_{\rm A} - t_{\rm B})^2 + (t_{\rm A} - t_{\rm C})^2} \tag{5-82}$$

と求められるが，Θ については不定性が残る．これは 3 台のレーザー干渉計で決まる平面の上下は区別できないからである．しかし，重力波源の方向を完全に決めるために必ず 4 台のレーザー干渉計が必要なわけではない．偏波という情報があるからである．

これを計算するには，まずレーザー干渉計の指向性を考える必要がある．重力波の偏波 h_+ お


図 5-14　レーザー干渉計型重力波検出器の指向性パターン．上下方向からの重力波に対してもっとも感度が高い．

よび $h_\times$ に対する指向性をそれぞれ $F_+(\theta,\phi)$, $F_\times(\theta,\phi)$ とすると

$$F_+(\theta,\phi) = \frac{1+\cos^2\theta}{2}\cos 2\phi \tag{5-83}$$

$$F_\times(\theta,\phi) = \cos\theta\sin 2\phi \tag{5-84}$$

であり, 図 5-14 の指向性パターンをもつ. レーザー干渉計で検出される位相差 $\Delta\phi_{\mathrm{GR}}$ は

$$\Delta\phi_{\mathrm{GR}}(t,\theta,\phi) = \Omega\int_{t-2\ell/c}^{t}[h_+(t')F_+(\theta,\phi)+h_\times(t')F_\times(\theta,\phi)]\mathrm{d}t' \tag{5-85}$$

となるから, あらかじめ h_+ と $h_\times$ の波形がわかっていれば, それを用いて θ を決められる. しかし一般には波形は未知であるから, レーザー干渉計の指向性の差による h_+ と $h_\times$ の強度比の変化から θ を決めることになる. 注意しなければいけないのは, 重力波の検出精度を上げるためには, 相互相関関数がなるべく 1 になるよう 2 台のレーザー干渉計の指向性を揃える必要があることである. LIGO の 2 台はそのように配置されており, 偏波の情報を引き出すことは難しい. また, 3 台のレーザー干渉計すべてが感度を持つ方向から重力波がやってくる保証はないので, 全天をカバーするためには 3 台では足りないことになる.

そういう理由で, 重力波天文台ネットワークを構成するためには少なくとも 4 台のレーザー干渉計が必要である. その 4 台目を目指しているのが日本と英独共同グループであり, それぞれ TAMA300, GEO600 と名付けられた中規模レーザー干渉計の建設に着手した. TAMA300 は将来のキロメートルクラス干渉計 (仮称 JGWO) へのマイルストーンであり [Tsubono 1995], 一方, GEO600 は先進的な技術により LIGO に匹敵する感度を出すことを目標とした意欲的な計画である [Danzmann et al. 1995]. ネットワークの地球上での配置 (図 5-15 参照) という意味では, 日本が非常に有利であることがわかる 4). もちろん 4 台で十分というわけではないので, 両グループが LIGO に匹敵するレーザー干渉計を持つことが望ましい.

5-3-4　宇宙空間重力波天文台

重力波天文学を開拓するためには, 低周波重力波を狙える方法を持つ必要がある. 観測可能な重力波源は原理的に大質量の天体であり, そこから発生する重力波の周波数は重力波源の大きさを光速で割った値となる. これを計算してみると, 質量 M の重力波源の大きさは, そのシュヴァルツシルト半径 r_{g}

$$r_{\mathrm{g}} = \frac{2GM}{c^2} \tag{5-86}$$

より小さくなることはない. また, 発生する重力波の周期 P は, この値を光速で割った値より短くなることはないので,

$$P \geq \frac{r_{\mathrm{g}}}{c} = \frac{2GM}{c^3} \tag{5-87}$$

となる. つまり重力波の周波数 f には

$$f \leq \frac{c^3}{2GM} \sim 10^3\frac{M_\odot}{M}\ \mathrm{Hz} \tag{5-88}$$

4) 重力波観測では, ニュートリノ観測と同じように地球の表裏は関係ない.

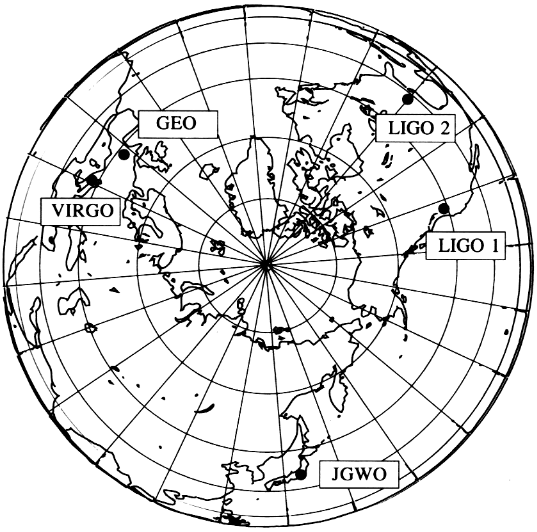


図 5-15　レーザー干渉計の地球上での配置

という制限がつく．巨大ブラックホール ($M \sim 10^7 M_\odot$) の合体を考えれば mHz のオーダーとなるのである．

このような理由で, mHz の重力波を観測可能な重力波検出器の必要性が強調されるようになった．これをレーザー干渉計で実現するとすれば, 最適光路長は数百万 km となり, 宇宙空間に巨大なレーザー干渉計を打ち上げるしかないというのが結論できる．地上で低周波検出器を実現できないもう 1 つの理由は, 大気揺らぎ等が引き起こす重力勾配の時間変動である．宇宙においても, 天体の運動による重力勾配変化が超低周波での感度を制限することになる．

現在 ESA と NASA の共同で計画されているのは, 地球の公転軌道上をまわる基線長 5×10^6km のレーザー干渉計 LISA である (補遺 B 参照)．構成としては 4 つの衛星による単純なマイケルソン干渉計であり, 姿勢制御用の推進素子等が開発できれば実現はあまり難しくない．打ち上げは当初 2015 年頃の予定であったが, 2004 年に早められる可能性もある．感度は mHz 帯で 10^{-23} を目標としている．重力波検出に直接関係はないが, ここで LISA の軌道 (図 5-16) を解説しておくことにする．

まず軌道の中心は地球と 20° の角度の位置にあり, 地球の後ろをついて回る．これは, 打ち上げロケットの燃料の問題と, テレメトリを考慮した結果である．軌道面は地球公転面と 60° の角度を成している．1 つの衛星に着目すると, この衛星は, 軌道の中心が公転軌道を 1 周する間 (1 年) にちょうど軌道を 1 周するようになっている．このような軌道は, 公転面に対して約 60° 傾いているときにだけ実現できることが, 面積速度一定の法則から導き出せる．つまり, この一見不思議な軌道は, 幾何学的条件だけで決まっているのである．当然, アンテナの指向性は 1 年周期で変動することになるが, これを利用して重力波の放射パターンや偏波に関する情報を引き出すという方針である．

重力波源としては, 連星の軌道運動, 連星ブラックホールの合体, 巨大ブラックホール等がある．感度曲線は図 5-17 に示すとおりである．特筆すべきは, 地球に非常に近い (12pc) 連星

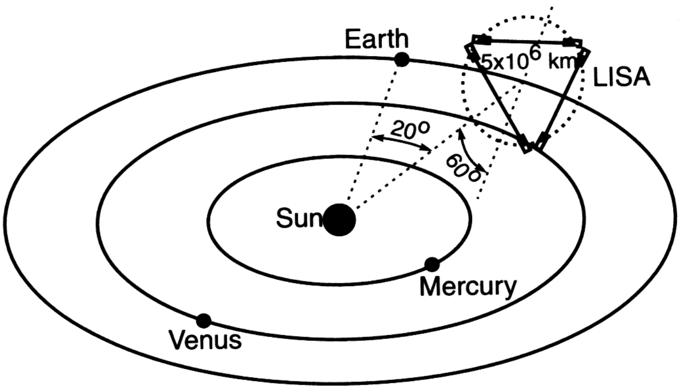


図 5-16　スペース重力波アンテナ LISA の軌道 [Thorne 1995]

44 i Boo(HD133640) である．これは質量が $1.35M_{\odot}$ と $0.68M_{\odot}$ の連星で，LISA の予想感度 ($S/N = 5$) ぎりぎりのところにあり，現時点で最も確実に観測可能な重力波源と言えるかもしれない．

5-3-5　月面重力波天文台

地上では 1Hz ぐらいの重力波を観測することも困難である．何故ならば，地面振動のスペクトルは

$$x_{\text{seismic}}(f) = \frac{10^{-7}}{f^2}\ \text{m}/\sqrt{\text{Hz}} \tag{5-89}$$

であり，10Hz 以下では非常に大きくなるからである．もちろん高性能な防振系を使うわけだが，それでも地上レーザー干渉計ではショットノイズをはるかに凌駕してしまうのである．アポロの設置した月面地震計の観測により月面は非常に静かであり，地面振動は地球の 1/100 以下であることがわかっている．さらに基線長 50km もの長基線レーザー干渉計を建設できる平坦なクレーターや，真空装置が不要なこと，熱雑音の観点からは極地の安定した低温環境も魅力的である．こういった背景のもとで，月面重力波天文台の構想が浮上してきた．

月面重力波天文台の最大のメリットは，地上重力波天文台とスペース重力波天文台の感度のちょうど狭間に位置することである．この周波数帯 (1Hz 近辺) にはパルサーが数多く存在し (700 程度)，それらが放出しているかもしれない連続重力波を長時間積分により観測できるのである．積分時間は，レーザーの寿命で制限されると予想され，3 年 (10^8秒) 程度になるであろう．もし，これらのパルサーからの重力波放出レートが検出されれば，統計的な中性子星の研究に役立つはずである．また連星 BH (ブラックホール) の合体という現象も観測可能である．

ただし，地上のように折り返しを利用して光路長を伸ばすことは難しいので，ショットノイズで決まる観測周波数帯域は結果的に 1 ～ 1000Hz 程度になる．1kHz での感度が十分高ければ，地上重力波天文台ネットワークとの連携で，重力波源の角度分解能を飛躍的に高めることが可能である．この意味でも月面重力波天文台の存在意義は十分あると言える．

21 世紀初頭から，日本では H2 ロケットを利用した月探査が進められる予定である．この計画にうまく組み込まれれば，意外と早く実現するかもしれない．

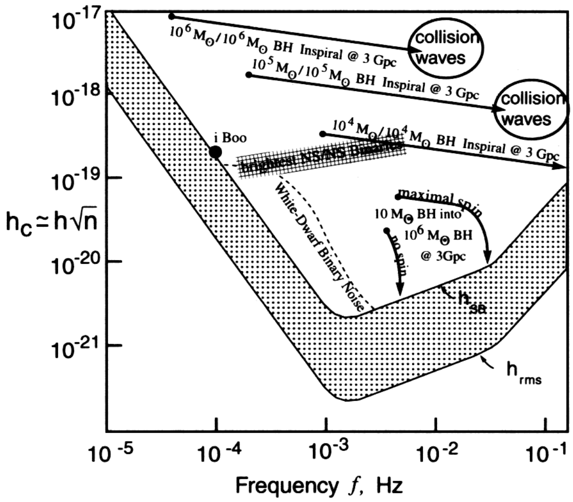


図 5-17　LISA の感度と重力波源 [Thorne 1995]

5-4　ドップラートラッキング

この節では, 重力波による電磁波のドップラー効果をスペースクラフトとのドップラートラッキング観測により検出する方法について解説する.

まず図 5-18 の配置を仮定する. つまり重力波 $h(t)$ は z 軸方向に進んでおり, 電磁波は地球とスペースクラフトの間 (距離 ℓ) を往復している. xz 平面での 4 次元線素は

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}t^2 + (1+h)\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}z^2 \tag{5-90}$$

と表される. ここで h は重力波の振幅であり, 偏波面は片方の偏波の効果が最大になるように取った. 電磁波は測地線 ($\mathrm{d}s^2 = 0$) 上を進むので

$$c^2\mathrm{d}t^2 = (1+h)\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}z^2 \tag{5-91}$$

である. ここで以下の計算を簡単にするために

$$\mathrm{d}r^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}z^2 \tag{5-92}$$

$$x = r\sin\theta \tag{5-93}$$

と置き換えれば, 式 (5-91) は

$$c\mathrm{d}t = \sqrt{(1+h\sin^2\theta)}\mathrm{d}r \approx \left(1+\frac{1}{2}h\sin^2\theta\right)\mathrm{d}r \tag{5-94}$$

となる.

周波数 ν の電磁波が地球から発射され (時刻 t_1), その波頭がスペースクラフトに到着する (時刻 $t_2 \approx t_1 + \ell/c$) までの時間を求めると (アップリンク),

$$t_2 - t_1 \approx \frac{1}{c}\left[\int_0^{\ell}\left(1+\frac{1}{2}h\sin^2\theta\right)\mathrm{d}r\right] \tag{5-95}$$

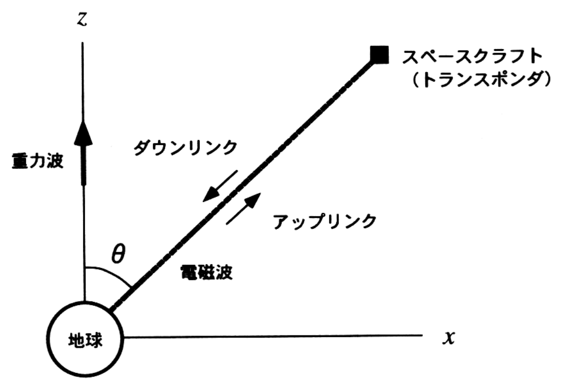


図 5-18　重力波の進行方向および地球とスペースクラフトの配置

$$= \frac{1}{c}\left[\ell + \frac{1}{2}\sin^2\theta \int_0^{\ell} h\left(t - \frac{z}{c}\right) \mathrm{d}r\right] \tag{5-96}$$

$$= \frac{1}{c}\left[\ell + \frac{1}{2}\sin^2\theta \int_0^{\ell} h\left(t_1 - \frac{r}{c} - \frac{r}{c}\cos\theta\right) \mathrm{d}r\right] \tag{5-97}$$

$$= \frac{1}{c}\left[\ell + \frac{1}{2}\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta} \int^{\ell} (1-\cos\theta)_0 h\left(t_1 + \frac{r'}{c}\right) \mathrm{d}r'\right] \tag{5-98}$$

となる．ここで $r' = r(1-\cos\theta)$ である．また関数

$$H(t) \equiv \int h(u)\mathrm{d}u \tag{5-99}$$

を定義すれば，

$$t_2 - t_1 \approx \frac{\ell}{c} + \frac{1}{2}(1+\cos\theta)\left[H\left(t_2 - \frac{\ell}{c}\cos\theta\right) - H\left(t_2 - \frac{\ell}{c}\right)\right] \tag{5-100}$$

と書ける．

重力波が存在しなければ $t_2 - t_1$ は当然 ℓ/c であるから，時間の遅れ（または進み）が生じたことになる．これを電磁波の周波数変化 $\Delta\nu$ で表したものがドップラー効果であるから，

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_2}(t_2 - t_1) \tag{5-101}$$

$$= \frac{1}{2}(1+\cos\theta)\left[h\left(t_2 - \frac{\ell}{c}\cos\theta\right) - h\left(t_2 - \frac{\ell}{c}\right)\right] \tag{5-102}$$

が得られる．この式は，スペースクラフトで見た場合のドップラー効果を表している．この周波数変化をスペースクラフトに積んだ局部発振器を用いて測定する方法もあるが，通常はトランスポンダにより電磁波が地球に向けて折り返し発射される（ダウンリンク）．

帰路についても同様の計算をすると，$t_3 \approx t_2 + \ell/c$ であるから

$$\frac{\Delta\nu'}{\nu} = \frac{1}{2}(1-\cos\theta)\left[h(t_3) - h\left(t_3 - \frac{\ell}{c} - \frac{\ell}{c}\cos\theta\right)\right] \tag{5-103}$$

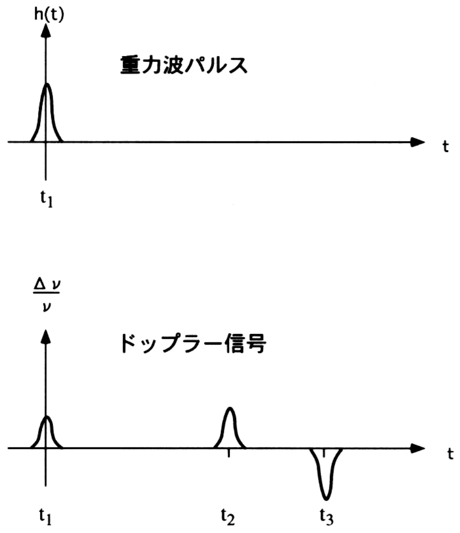


図 5-19　重力波によって生じるドップラー効果

となる．以上をまとめると，

$$\frac{\Delta\nu}{\nu}+\frac{\Delta\nu'}{\nu}=\frac{1}{2}(1-\cos\theta)h(t_3)+\cos\theta h\left(t_3-\frac{\ell}{c}-\frac{\ell}{c}\cos\theta\right)+\frac{1}{2}(1+\cos\theta)h\left(t_3-\frac{2\ell}{c}\right) \quad (5\text{-}104)$$

という結果が得られる．これを図で示すと図 5-19 のようになる．つまり，信号として現れるのは，

- 電磁波が地球から発射された時
- 電磁波がスペースクラフトに到着した時
- 電磁波が地球に戻ってきた時

の重力波の影響であり，伝搬途中の重力波に影響されないことがわかる [平川 1985].

この検出法では明らかに局部発振器の周波数安定性でその感度が制限され，安定な水素メーザーを使ったとしてもその安定性は $\sigma_y = 10^{-15}(\tau = 1000$ 秒) 程度であるから，h に対する感度もそれぐらいである．つまり，かなり大きな振幅を持つ重力波しか検出できない．

上ではパルス的な重力波を考えたが，ドップラートラッキングが有効になる低周波重力波に対する感度を求める．これは重力波の変化が十分遅い場合に相当し，3 つの信号はオーバーラップして 0 次の効果は打ち消されてしまう．式 (5-104) を時間に関して 1 次のテーラー展開

$$h(t+\delta t) = h(t) + \dot{h}(t)\delta t \quad (5\text{-}105)$$

を用いて整理すると，

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{2\ell}{c}\sin^2\theta\ \dot{h}(t) \quad (5\text{-}106)$$

となる．このままでは見通しが悪いので，積分して位相変化に直すと

$$\Delta\phi = 2\pi\nu\frac{2\ell}{c}\sin^2\theta\ h(t) \quad (5\text{-}107)$$

となる [Hellings 1991]. これはレーザー干渉計での重力波検出で見慣れた式であり, この式と位相読み取り精度を考えれば, 低周波重力波に対する感度がわかることになる. ただしレーザー干渉計と違って位相読み取り精度はショットノイズには達しないのが普通である. 観測周波数帯は, 下限が電磁波の往復時間, 上限が増幅器の雑音で制限されていて, 大体 $10^{-4} \sim 10^{-2}$Hz である. その他の雑音としては,

- 電離層遅延
- 星間プラズマ
- 太陽風
- 衛星軌道誤差

があるが, 星間プラズマの影響が最も深刻であり, 通常これで感度が決まってしまう. この影響を少なくするためには, なるべく高い周波数を使うか, 2 周波を用いて補正する方法がある.

実際の観測はこれまで Viking や Voyager 等の惑星探査機を使って行われてきたが, 最新のものとして ULYSSES を例にとる. ULYSSES は太陽の南北極を観測する探査機で, ESA と NASA が 1990 年に打ち上げたものである. 1992 年に木星の重力を利用して軌道を変えた時期に重力波探査が行われた. 探査機の位置として, 太陽風の影響が少ない木星以遠が望ましいからである. この時のマイクロ波の往復時間は大体 10^4 秒である. 観測は, NASA の深宇宙探査局ネットワーク (Deep Space Network) と日伊の国際共同グループにより, S-band と X-band の 2 周波 (アップリンクは S だけ) を使って, ほぼ 1ヶ月間にわたって行われた. この観測ではプラズマ補正が十分できないため, 感度はやはり星間プラズマで制限されていて,

$$h(f) = 1.3 \times 10^{-15} \left(\frac{f}{10^{-2}\mathrm{Hz}} \right)^{-0.26} \qquad 2.3 \times 10^{-4} \leq f \leq 5 \times 10^{-2}\mathrm{Hz} \tag{5-108}$$

である [Iess et al. 1995]. この後, 1993 年には 3 つの探査機を使った同時観測も行われており, こちらについては現在データ解析中である.

今後の計画としては, 完全な 2 周波観測が必須となることは間違いなく, 1997 年に打ち上げられた CASSINI で, X-band と Ka-band を用いた観測が計画されている.

5-5 パルサータイミング

これは天然の超高精度時計であるパルサーからのパルスの到達時刻を詳細に解析することによる重力波検出法である. パルサーの中でも特に安定なミリ秒パルサーをまとめたものが表 5-5 である. このうち PSR1937+21 以外は全て連星パルサーである. パルサーの回転位相 $\Phi(t)$ はスピンダウンにつれて

$$\Phi(t_\mathrm{P}) = \Phi_0 + \frac{1}{P_0}(t_\mathrm{P} - t_0) - \frac{\dot{P}_0}{2{P_0}^2}(t_\mathrm{P} - t_0)^2 + R_\phi \tag{5-109}$$

のように変化している. ここで t_P はパルス発射時刻で R_ϕ は高次の項や揺らぎである. 変化しているとはいえ, スピンダウン時間は 1 億年以上であるので, 超高精度時計であると言えるのである.

表 5-5 ミリ秒パルサーの性質

PSR	P [ms]	$\log \dot{P}$	$P_{\rm orb}$[days]	e
1855+09	5.36	-19.77	12.33	2.1×10^{-5}
1937+21	1.56	-18.97	-	-
1953+29	6.13	-19.53	117.35	3.3×10^{-4}
1957+20	1.61	-19.79	0.38	$< 2 \times 10^{-5}$

P はパルス周期, $\log \dot{P}$ はパルス周期の変化率, $P_{\rm orb}$ は連星の軌道周期, e は軌道の離心率

太陽系中心へのパルスの到着時刻 $t_{\rm B}$ は, 地上で観測された到着時刻 $t_{\rm obs}$ から次のように変換できる.

$$ct_{\rm B} = ct_{\rm obs} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} + c\left(\Delta t_{\rm r} - \Delta t_{\rm g} - \frac{D}{f^2}\right) \tag{5-110}$$

ここで $\mathbf{n}$ は太陽系重心から見たパルサーの方向の単位ベクトル, $\mathbf{r}$ は太陽系重心に対する電波アンテナの位置, $\Delta t_{\rm r}$ は国際原子時から太陽系力学時への変換値, $\Delta t_{\rm g}$ は太陽系天体の重力場による電波伝搬の遅延量, D/f^2 は分散遅延の補正である [藤本 1990].

このようにして得られた $t_{\rm B}$ を式 (5-109) に代入したときの残差が重力波の効果である. 短周期の重力波によるドップラー効果は前節で計算した式 (5-102) にしたがって, 式 (5-109) の右辺第 2 項に現れる. 長周期のものについては最後の項に含まれることになる.

パルサータイミングのターゲットは, 他の方法では得ることのできない超低周波の重力波である. 具体的には, 宇宙創成時の背景重力波 (温度で約 1K) や, 宇宙ひも等の宇宙論的な重力波が考えられている.

実際, 20 年以上にわたるミリ秒パルサー PSR1937+21 のタイミング観測によって,

$$\Omega_{\rm GW} \le 1 \times 10^{-6} \left(\frac{f}{10^{-8}{\rm Hz}}\right)^4 \quad \text{for} \quad f \ge f_{\rm min} = 10^{-8}{\rm Hz} \tag{5-111}$$

という制限が得られている [Thorne 1987]. 観測周波数帯は, 上限が十分な精度を出すために必要な積分時間 (2,3ヶ月), 下限がこれまでの積算観測時間 (20 年) で制限されている. これは, 背景重力波に対しては宇宙を閉じさせるだけのエネルギー密度がないという結果であり, また宇宙ひもに対してもかなり厳しい制限を与えているのである (4-5-5 項も参照).

5-6 まとめ

以上では, 重力波検出法とその検出対象を解説した. 様々な検出法があるが, その中でも有望なのは, キロメートルの基線長を持つレーザー干渉計と極低温の共鳴型アンテナである. その検出対象は, どちらも連星中性子星の合体と星の重力崩壊である. 実際には, そのどちらかの重力波源から発生するバースト重力波を検出した後に, レーザー干渉計による波形観測が可能となるであろう. それに続いて, 地上の制約 (装置の規模や地面振動など) を逃れたスペース重力波アンテナが実現し, そこから本当の意味での重力波天文学が始まると予想される.

いずれにしろ, 理論的な重力波形の研究を含め, 重力波検出計画がこれまでにない展開を見せている. 最初の重力波直接検出が何年後になるかは予想できないが, その時まで感度向上の努力が絶えず続けられてゆくことは間違いない.

第6章 ・ レーザー干渉計

レーザー干渉計を利用した重力波検出器は非常に広い帯域幅をもち, 入射重力波の波形を観測できる可能性があるので, 重力波天文台を実現するための第一候補と考えられている [Giazotto 1989]. 現在, プロトタイプと呼ばれる基線長が数十 m のものが世界各地で開発され, 共振型に匹敵する感度を出している [Shoemaker et al. 1988, Nicholson et al. 1996, Abramovici et al. 1996]. また, 天文台と呼ぶにふさわしい数 km の腕をもつ大型干渉計の建設計画が提案され, 米国の LIGO 計画やフランスとイタリアの国際協力による VIRGO 計画が政府の承認を得てスタートした [Abramovici et al. 1992, VIRGO 1992]. ここでは, 干渉計による重力波検出器の概論を述べる.

6-1 検出原理

まず初めに, レーザー干渉計によって, いかに重力波を検出するかの原理について述べることにする.

6-1-1 マイケルソン干渉計における重力波による位相変化

図 6-1 は一番基本的なマイケルソン干渉計である. ビームスプリッターで分けられた光は直交する 2 本の光路を往復して再びビームスプリッターで一緒になる. このとき 2 つの光に位相差が存在すると干渉によって光検出器に入射する光の強度が変化する. 入射波を $A_\mathrm{i} = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(t)}$ で与えると, 光検出器のところでの光波は, X 軸に沿って往復してきた光 (A_1) と Y 軸に沿って往復してきた光 (A_2) の重ね合わせによって表されるので,

$$A_\mathrm{d} = A_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_1} + A_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_2} \tag{6-1}$$

となる. 検出器に流れる光電流 I_P はその点での光強度に比例し, 光強度は電磁場の振幅の絶対値の 2 乗に比例するので,

$$I_\mathrm{P} = \frac{I_\mathrm{max} + I_\mathrm{min}}{2} + \frac{(I_\mathrm{max} - I_\mathrm{min})\cos(\phi_1 - \phi_2)}{2} \tag{6-2}$$

という変化をする [Shoemaker et al. 1988]. ここで, I_max, I_min は光電流の最大, 最小値を表し,

$$K = \frac{I_\mathrm{max} - I_\mathrm{min}}{I_\mathrm{max} + I_\mathrm{min}} \tag{6-3}$$

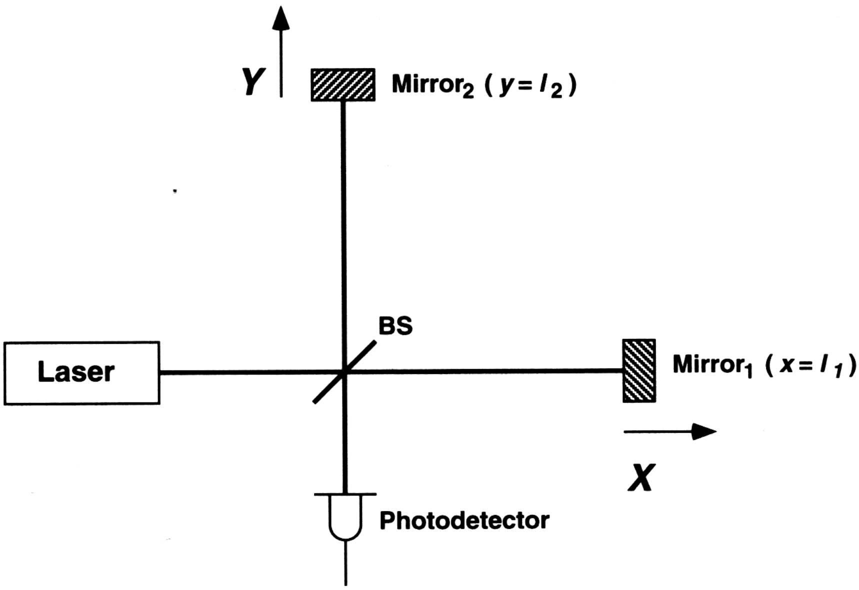


図 6-1　マイケルソン干渉計と重力波. ビームスプリッター (BS) を座標の原点にとり, 直交した 2 本の干渉計の光路 (腕) を X 軸と Y 軸にとる. それぞれの鏡は原点から ℓ_1, ℓ_2 の距離にあり, $\ell_1 \approx \ell_2$ である. レーザーから出た光はビームスプリッターで分けられ, それぞれの光路を往復して, 再びビームスプリッターで重ね合わされて干渉する. その干渉光の強度を光検出器で検出する. Z 方向から入射した重力波によって, 2 つの光路長に僅かな差が生じ, 干渉光の光強度が変化する.

はビジビリティー (visibility) とよばれて干渉縞の明瞭度を表す指標である [Born and Wolf 1980].

次に, 重力波によって生じる位相差を計算してみる. 重力波 $h(t)$ が Z 軸方向から入射し, 4 次元線素が TT ゲージの 1 つの偏波成分を用いて

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}t^2 + (1+h)\mathrm{d}x^2 + (1-h)\mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \tag{6-4}$$

で与えられると仮定する[1)] (式 (2-168)). この場合, 鏡の運動方程式はニュートン近似で

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}t^2} = 0 \tag{6-5}$$

となって, 最初に静止していた自由質量は一定の座標値[2)] を保つ [平川 1986]. また, 光の伝播は $\mathrm{d}s^2 = 0$ で決まり, X 軸に沿って往復して来た光 (波長 λ) は $\mathrm{d}y = \mathrm{d}z = 0$ を満たす. したがって,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm\frac{c}{\sqrt{1+h(t)}} \tag{6-6}$$

となる. ここで, 複号は $+$ が X 軸の正の向きに進む光, $-$ は負の向きに進む光に対応する. そして, 時刻 τ_1 に干渉計に入射し, 距離 ℓ_1 を往復して時刻 t に戻ってきた光の位相は

$$\phi_1(t) = \phi(\tau_1) = \Omega\tau_1 \quad \left(\Omega = \frac{2\pi c}{\lambda}\right) \tag{6-7}$$

1) この偏波成分は $+$ モードと呼ばれる. もう 1 つの偏波成分の $\times$ モードの重力波に対しては, 干渉計はこの配置では感度を持たない.

2) これは, 座標の値を意味していて, 鏡の間の固有距離が変わらないという意味ではない. いま考えている座標系では, 重力波が入射すると物体の "位置" が変わらないで "メトリック" が変化するのである.

と表せるので, 式 (6-6) を τ_1 から t まで積分し, τ_1 の満たすべき方程式を求めると

$$\int_{\tau_1}^{t} \frac{\mathrm{d}t'}{\sqrt{1+h(t')}} = \frac{1}{c}\left[\int_0^{\ell_1} \mathrm{d}x + \int_{\ell_1}^{0} (-\mathrm{d}x)\right] = \frac{2\ell_1}{c} \tag{6-8}$$

である. そしてこの式を h の 1 次で近似すると

$$\int_{\tau_1}^{t} \frac{\mathrm{d}t'}{\sqrt{1+h(t')}} \approx \int_{\tau_1}^{t} \left[1 - \frac{1}{2}h(t')\right] \mathrm{d}t' = \frac{2\ell_1}{c} \tag{6-9}$$

となる.

もし, $h = 0$ ならば $\tau_1 = t - 2\ell_1/c$ だから, 左辺第 2 項の積分の下限は $\tau_1 = t - 2\ell_1/c$ としてもよいので

$$\phi_1(t) = \Omega\left[t - \frac{2\ell_1}{c} - \frac{1}{2}\int_{t-2\ell_1/c}^{t} h(t')\mathrm{d}t'\right] \tag{6-10}$$

となる. Y 軸方向では重力波の影響が逆符号であることを考えて位相差になおすと

$$\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2 = -\frac{2\Omega(\ell_1 - \ell_2)}{c} - \Delta\phi_{\mathrm{GR}}(t) \tag{6-11}$$

$$\Delta\phi_{\mathrm{GR}}(t) = \Omega\int_{t-2\ell/c}^{t} h(t')\mathrm{d}t' \quad (\ell_2 \approx \ell_1 = \ell) \tag{6-12}$$

という式が得られる. 式 (6-11) の最初の項は静的な位相差を表し, 重力波はその周りにわずかな変化を生じさせることを示している [Vinet 1986].

6-1-2　周波数応答関数と基線長

h の変化が十分にゆっくりの場合には式 (6-12) は

$$\Delta\phi_{\mathrm{GR}}(t) \approx \frac{4\pi}{\lambda}h(t)\ell \tag{6-13}$$

という式に帰着され, 基線長が長いほど感度が高くなることを示している. この式は基線長が数十 m の干渉計では良い近似を与えるが, 本格的な大型干渉計ではそうならない.

観測を行う場合には, 対象となる信号の周波数成分を考える場合が多いので, 特定の周波数の正弦波に対する出力 (周波数応答関数) を考えることにする. そして $h(t)$ をフーリエ分解して

$$h(t) = \int h(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{6-14}$$

とすると

$$\Delta\phi_{\mathrm{GR}}(t) = \int h(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} H_{\mathrm{M}}(\omega)\mathrm{d}\omega \tag{6-15}$$

$$H_{\mathrm{M}}(\omega) = \frac{2\Omega}{\omega}\sin(\ell\omega/c)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\ell\omega/c} \tag{6-16}$$

と表すことができ, $H_{\mathrm{M}}(\omega)$ は ω の周波数の重力波に対する干渉計の応答関数と考えることができる. まず, 観測すべき周波数を固定 ($\omega = \omega_0$) して $H_{\mathrm{M}}(\omega)$ を基線長 ℓ の関数として考えると, $\ell\omega_0/c = \pi/2$ で絶対値が最大になる. したがって, これ以上長くしても感度の向上はない. これ

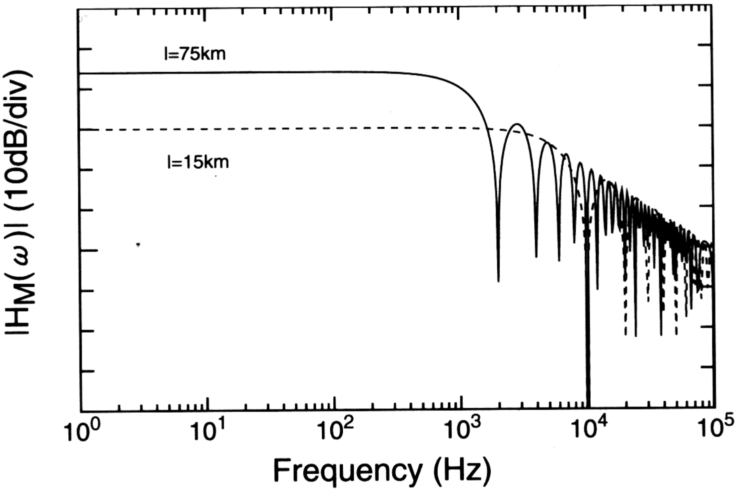


図 6-2　マイケルソン干渉計の周波数応答関数．重力波が正弦的な変化を行う場合の干渉計の位相変化の大きさを重力波の周波数の関数としてプロットした．基線長が 75km と 15km の場合で計算してある．

は光が往復する間に重力波の影響が積分されて感度が落ちはじめるからである．$\omega_0/2\pi$=1kHz とすると ℓ=75km となる．また, ℓ を固定して $|H_{\rm M}|$ を観測する周波数の関数としてグラフにすると図 6-2 のようになる．このグラフからわかることは前に求めた ω_0 の値より低い周波数の信号に対しては平坦な応答を示すがこれより高い周波数では急速に感度が低下するということである．例えば, ℓ=75km とすると 2kHz の信号はすでに受信できない．もし 5kHz を検出しようと考えると ℓ=15km となるが, このときは 1kHz の信号に対する感度は 75km の時の約 1/3 に低下する．このように, 基線長が長くなると測定できる信号の帯域幅が限られてくるのである．

6-1-3　検出器の指向性

これまでは, 重力波が干渉計に垂直で一番感度が高い偏波状態で入射した場合を考えてきたが, 現実には入射方向も偏波状態もいろいろな場合がある．ここでは, 検出器の感度の方向や偏波依存性 (指向性) について考える．

重力波が θ と ϕ で指定される方向から入射すると, この波数ベクトル $\mathbf{k}$ は

$$\mathbf{k} = -(\cos\phi\sin\theta,\ \sin\phi\sin\theta,\ \cos\theta) \tag{6-17}$$

となる．また, 重力波の伝播に沿った座標系で重力波の (空間) 成分が

$$\mathbf{h}^{(0)} = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6-18}$$

と表されていたと仮定する．この重力波を干渉計に固定した座標系での成分で表す場合は,

$$\mathbf{R}(\theta,\phi) = \begin{pmatrix} -\cos\theta\cos\phi & -\sin\phi & -\sin\theta\cos\phi \\ -\cos\theta\sin\phi & \cos\phi & -\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta & 0 & -\cos\theta \end{pmatrix} \tag{6-19}$$

という回転行列を用いて

$$\mathbf{h} = \mathbf{R}(\theta, \phi)\mathbf{h}^{(0)}\mathbf{R}^{-1}(\theta, \phi) \tag{6-20}$$

という式で計算をする．干渉計の位相変化を引き起こす成分は X 方向の光路の光には h_{xx}, Y 方向の光路の光には h_{yy} が寄与するので

$$h_{\mathrm{eff}} = \frac{h_{xx} - h_{yy}}{2} = h_{+}\frac{1+\cos^2\theta}{2}\cos 2\phi + h_{\times}\cos\theta\sin 2\phi \tag{6-21}$$

を式 (6-12) の中の h の代わり用いて，この方向から入射した場合の重力波による位相変化と考えればよい．すなわち，

$$\Delta\phi_{\mathrm{GR}}(t, \theta, \phi) = \Omega\int_{t-2\ell/c}^{t}[h_{+}(t')F_{+}(\theta, \phi) + h_{\times}(t')F_{\times}(\theta, \phi)]\mathrm{d}t' \tag{6-22}$$

$$F_{+}(\theta, \phi) = \frac{1+\cos^2\theta}{2}\cos 2\phi \tag{6-23}$$

$$F_{\times}(\theta, \phi) = \cos\theta\sin 2\phi \tag{6-24}$$

となる [Thorne 1987]. この式を見ると，$\theta = 0$ の場合に比べて，$\theta = \pi/2$ の時は感度が悪くなることがわかる．つまり，干渉計を含む平面内で入射してくる重力波には感度が悪いのである．このため，地球上で数台の大型干渉計を建設してネットワークを作る場合には，指向性を考慮して位置を決めなければならないと考えられている．

6-1-4　ディレイラインとファブリ-ペロー

現実の問題を考えると ℓ=75km のようなものを作るのは不可能であろう．そのため鏡の間で光を何度も往復させて光路長を稼ぐディレイライン (Delay-Line,DL) 方式と多重干渉を利用したファブリ-ペロー (Fabry-Perot,FP) 干渉計を用いる方式が検討されている (図 6-3). それぞれ

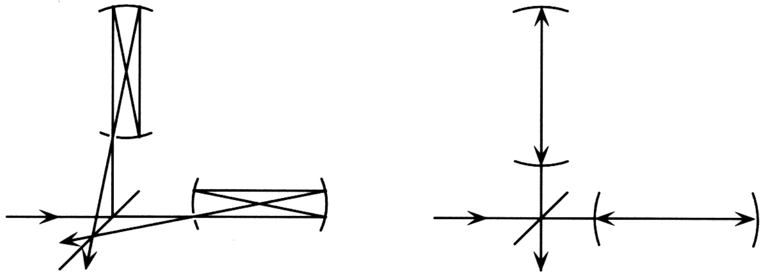


図 6-3　ディレイライン方式とファブリ-ペロー方式．ディレイライン方式では鏡の異なる点を用いて光を往復させ，ファブリ-ペロー方式では同じ光路上を往復させて，有効な光路長を大きくする．

の方法で長短があり，どちらが有利かは議論が分かれるが，後述のように，大型計画では FP 方式が採用されている．これは，DL 方式では光を往復させるときに鏡の違う場所を使うため FP と

比較すると大きな鏡を必要とし, 鏡そのものを製作する際の困難さや鏡の機械振動, これらを収納する真空容器などを考えるとかなり厳しい制約となると考えられているからである.

実際に重力波の波形が与えられた時の干渉計の出力がどのようになるかを計算するには, 干渉計の応答関数を知る必要である. 単純なマイケルソン干渉計は折返し回数 N が 2 の DL と同じものと考えられるので H_M の ℓ を $N\ell/2$ に置き換えればよい. したがって,

$$H_\mathrm{DL}(\omega) = \frac{2\Omega}{\omega}\sin(N\ell\omega/2c)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}N\ell\omega/2c} \tag{6-25}$$

となる [Meers 1988, Vinet et al. 1988]. そして, 1kHz の重力波に対して実基線長が 3km では $N=50$ のときに感度が最大となる.

FP の場合は光が同一の場所を往復する多重干渉のために重力波に対する応答は簡単ではない. これは, 次の節で詳しく扱うことにする.

6-2 ファブリ-ペロー干渉計型重力波検出器

前節で述べたように, 現在はファブリ-ペロー型干渉計が主流になっている. ここでは, その特性, 特に, 重力波との相互作用について述べる.

6-2-1 ファブリ-ペロー干渉計

ファブリ-ペロー干渉計は, 図 6-4 に示すように, 2 枚の鏡を向かい合わせて, 光をその間で往復させるものである. いま, 入射波を $A_\mathrm{i}(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}$ とする. このとき, 反射波は

$$A_\mathrm{r}(t) = \mathrm{i}\left[r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} - \frac{{t_1}^2}{r_1}\sum_{n=1}^{\infty}(-r_1r_2)^n\exp(\mathrm{i}\Omega\tau_n)\right] \quad \left(\tau_n = t-\frac{2\ell}{c}n\right) \tag{6-26}$$

という無限級数で表される. ここで, t_i, r_i $(i=1,2)$ はそれぞれの鏡の振幅透過率と振幅反射率である[3]. そして無限級数を計算すると

$$A_\mathrm{r}(t) = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}[r_1 + a(\Omega)] \tag{6-27}$$

$$a(\Omega) = \frac{{t_1}^2 r_2\exp(-2\mathrm{i}\Omega\ell/c)}{1+r_1r_2\exp(-2\mathrm{i}\Omega\ell/c)} \tag{6-28}$$

となる. 同様にして透過光を計算すると

$$A_\mathrm{t}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega(t-\ell/c)}\frac{t_1t_2}{1+r_1r_2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\Omega\ell/c}} \tag{6-29}$$

と表される. もし, $\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\Omega\ell/c}=-1$ という条件を満たすと, 透過光強度は最大になる. これが共振条件である. この共振条件を満たす光の周波数 $\nu=\Omega/2\pi$ の n 番目と $n+1$ 番の間隔は

$$\nu_{n+1}-\nu_n = \frac{c}{2\ell} = \nu_\mathrm{FSR} \tag{6-30}$$

で, FP の フリースペクトラルレンジ (Free Spectral Range, FSR) と呼ばれている.

実際の干渉計では, 2 枚の平面鏡の代わりに 2 枚の球面鏡や平面鏡と球面鏡の組み合わせで構成される. このような光学系の議論は補遺 A,C に詳しく述べられている.

---

3) ここでは鏡の反射率を虚数に取ったので, 表の反射率と裏の反射率は同じ ir と表せる [Vinet et al. 1988].

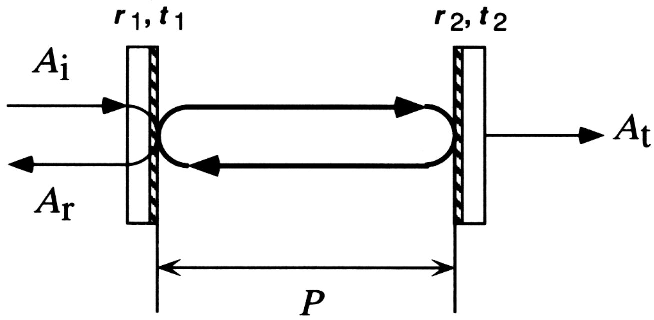


図 6-4　FP 干渉計. 2 枚の鏡を対向して置き, 光をその間で往復させる. 多重干渉によって, 特定の波長の光だけが干渉計の内部に蓄えられ, 大きな光強度をもつようになる.

6-2-2　ファブリ-ペロー干渉計の重力波に対する応答

FP が X 軸に沿って設置されているとし, もし, 重力波が存在しているとどうなるかを計算してみる. 単純なマイケルソン干渉計の場合と同じ条件で重力波が入射しているとすると, τ_n に対する条件が

$$\int_{\tau_n}^{t} \frac{\mathrm{d}t'}{\sqrt{1+h(t')}} = \frac{2\ell}{c}n \tag{6-31}$$

で計算される. ここで, やはり h の 1 次で近似すると

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega\tau_n} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega(t-2\ell n/c)}\left[1 - \mathrm{i}\frac{\Omega}{2}\int h(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\frac{1-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega\ell n/c}}{\mathrm{i}\omega}\mathrm{d}\omega\right] \tag{6-32}$$

である. これを用いて無限級数を計算すると

$$A_\mathrm{r}(t) = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}\left[r_1 + a(\Omega) - \frac{\mathrm{i}\Omega}{2}\int h(\omega)\frac{a(\Omega)-a(\Omega+\omega)}{\mathrm{i}\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega\right] \tag{6-33}$$

が得られる. いま, 入射波の光周波数が FP の 1 つの縦モードに共振しているとすると ($\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\Omega\ell/c} = -1$)

$$A_\mathrm{r}(t) = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}(r_1 - \alpha_\mathrm{c} + \mathrm{i}\Delta_\mathrm{GR}(t)/2) \tag{6-34}$$

$$\Delta_\mathrm{GR}(t) = \int h(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}H_\mathrm{FP}(\omega)\mathrm{d}\omega \tag{6-35}$$

$$H_\mathrm{FP}(\omega) = \frac{2\alpha_\mathrm{c}\Omega}{\omega}\sin(\omega\ell/c)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\ell/c}\frac{1}{1 - r_1 r_2\exp(-2\mathrm{i}\omega\ell/c)} \tag{6-36}$$

$$\alpha_\mathrm{c} = \frac{{t_1}^2 r_2}{1 - r_1 r_2} \tag{6-37}$$

となる [Meers 1988]. ここで, $\mathrm{i}\Delta_\mathrm{GR}$ は重力波によって生じた側帯波を表している. そして, 搬送波の成分が実数で側帯波は純虚数である. 式 (6-34) を考えると,

$$A_\mathrm{r}(t) = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}(r_1 - \alpha_\mathrm{c} + \mathrm{i}\Delta_\mathrm{GR}(t)/2) \approx \mathrm{i}(r_1 - \alpha_\mathrm{c})\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\Omega t + \phi_\mathrm{GR}(t)/2]} \tag{6-38}$$

$$\phi_\mathrm{GR}(t) = \frac{\Delta_\mathrm{GR}(t)}{r_1 - \alpha_\mathrm{c}} \tag{6-39}$$

と書けるので, この側帯波は位相変調を表している. ただ, FP ではそれを構成する鏡の反射率などの条件により搬送波の大きさが変化するので, 重力波による影響は位相の変化量に換算するよ

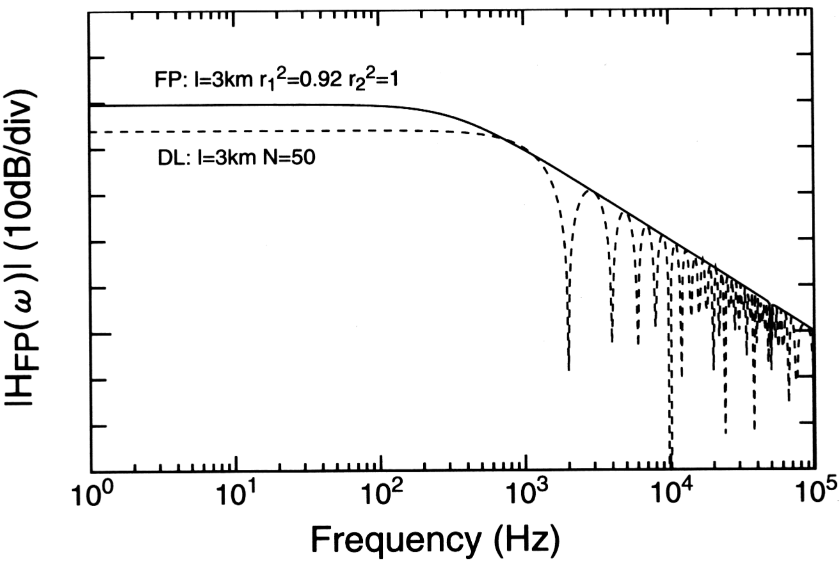


図 6-5 FP 干渉計の応答関数. 基線長を 3km とする.

り側帯波の成分として取り扱う方が便利である. そのため, 応答関数 $H_{\rm FP}$ も重力波を入力信号とし側帯波を出力信号と考えた場合の応答を表している.

この応答関数の絶対値を考えると

$$|H_{\rm FP}(\omega)| = \frac{2\alpha_{\rm c}\Omega}{\omega(1-r_1r_2)}\frac{|\sin(\omega\ell/c)|}{\sqrt{1+F\sin^2(\omega\ell/c)}} \tag{6-40}$$

$$F = \frac{4r_1r_2}{(1-r_1r_2)^2} = \left(\frac{2\mathcal{F}}{\pi}\right)^2 \tag{6-41}$$

ここで $\mathcal{F}$ はフィネスと呼ばれ,

$$\mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{r_1r_2}}{1-r_1r_2} = \frac{\nu_{\rm FSR}}{\Delta\nu} \tag{6-42}$$

で定義される. また, $\Delta\nu$ は共振の半値全幅である.

$|H_{\rm FP}|$ を ℓ の関数と考えると, やはり $\ell\omega/c = \pi/2$ の時最大となる. しかし, フィネスが高い場合はあまり大きな依存性はない. また, 周波数の関数としてグラフにすると図 6-5 のようになり $\omega/2\pi > c/2\ell$ では前述の単純なマイケルソン干渉計と同様な複雑な構造を示す. 例えば ℓ=3km で FP を構成して 1kHz での感度が DL で得られる最高感度とほぼ等しくなるように反射率を選ぶと, それより低い周波数では DL より高い感度を示し, 高いところ (<50kHz) でもなめらかな形をしていて DL より素直な応答特性が得られる.

特に, $\omega\ell/c \ll 1$ のときには

$$|H_{\rm FP}| \approx 2\alpha_{\rm c}\frac{\Omega}{\omega}\frac{\tau_{\rm s}\omega}{\sqrt{1+(\tau_{\rm s}\omega)^2}} \tag{6-43}$$

$$\tau_{\rm s} = \frac{\ell\sqrt{F}}{c} = \frac{2\ell\mathcal{F}}{\pi c} \tag{6-44}$$

となる. τ_s は FP の蓄積時間 (storage time) と呼ばれるもので, その逆数が応答関数の遮断 (角) 周波数を与える.

6-3　行列による応答関数の定式化

FP の応答関数のところで述べたように, ある周波数 ω の重力波が存在すると, その中を伝播する光 (周波数 Ω) には周波数 $\Omega+\omega$ の側帯波が生じ, その振幅は重力波の振幅 h に比例する. すなわち,

$$A(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}\left[A_0(\Omega)+\int_{-\infty}^{\infty}A_1(\Omega,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega\right] \tag{6-45}$$

と書くことができる. この光が別の光学系を通過した時は, 重力波の効果の 1 次までを常に考えることにすれば, その出力はやはり

$$B(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}\left[B_0(\Omega)+\int_{-\infty}^{\infty}B_1(\Omega,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega\right] \tag{6-46}$$

のように書くことができるはずである. これらの関係は線形のはずなので,

$$B_0(\Omega)=S_{00}(\Omega)A_0(\Omega) \tag{6-47}$$

$$B_1(\Omega,\omega)=S_{10}(\Omega,\omega)A_0(\Omega)+S_{11}(\Omega,\omega)A_1(\Omega,\omega) \tag{6-48}$$

と書くことができる. また, これは,

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}A_0\\A_1\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}B_0\\B_1\end{pmatrix},\quad \mathbf{S}=\begin{pmatrix}S_{00}&0\\S_{10}&S_{11}\end{pmatrix} \tag{6-49}$$

で定義される, ベクトル $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ および行列 $\mathbf{S}$ によって,

$$\mathbf{B}=\mathbf{S}\cdot\mathbf{A} \tag{6-50}$$

と書き表すことができる. この方法はフランスの Vinet が考案した [Vinet 1986, Vinet et al. 1988]. 原著論文では側帯波として $\Omega\pm\omega$ の 2 つを考えているが, h の 1 次近似の範囲ではこの 2 つの側帯波は独立で, 片方だけの計算で十分である. この行列形式を用いると光学系や電気系の伝送行列と同じように連続する光学系の影響は行列の積で計算できる. S_{00} や S_{11} は周波数が Ω や $\Omega+\omega$ の光の伝播を記述している. S_{10} は搬送波が重力波と相互作用して側帯波を生成する作用を表しているので, この要素の大きさは重力波の振幅に比例している. また, $S_{01}=0$ を仮定しているが, この要素は周波数 $\Omega+\omega$ の光から周波数 Ω の光を生成する作用を示していて, h の 2 次以上の効果になるので 0 と考えてよい.

例を考えてみる. まず, + モードの重力波を考え, X 軸に沿って距離 ℓ だけ光が伝播する場合を考えよう. このとき, 光の位相は, 式 (6-10) を導出したときと同じようにして

$$\begin{aligned}\phi(t)&=\Omega\left[t-\frac{\ell}{c}-\frac{1}{2}\int_{t-\ell/c}^{t}h(t')\mathrm{d}t'\right]\\&=\Omega\left[t-\frac{\ell}{c}-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\ell\omega/2c)}{\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\ell\omega/2c}h(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega\right]\end{aligned} \tag{6-51}$$

と書き表すことができる．したがって，

$$e^{i\phi(t)} = e^{i\Omega(t-\ell/c)}\left[1 - i\Omega\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\omega\ell/2c)}{\omega}e^{-i\omega\ell/2c}h(\omega)e^{i\omega t}d\omega\right] \tag{6-52}$$

となる．これは $A_0 = 1$, $A_1 = 0$ を入力したとき

$$B_0 = e^{-i\Omega\ell/c} \tag{6-53}$$

$$B_1 = -i\Omega h(\omega)e^{-i\Omega\ell/c}\frac{\sin(\omega\ell/2c)}{\omega}e^{-i\omega\ell/2c} \tag{6-54}$$

が出力として得られたことを示している．この議論では，$A_1 \neq 0$ の場合がわからないが，基本的に側帯波の大きさは重力波の振幅に比例するので，空間を伝播する場合には搬送波の成分と同じように位相が遅れるのみのはずである．したがって，

$$\mathbf{D} = e^{-i\Omega\ell/c}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i\Omega h(\omega)\dfrac{\sin(\omega\ell/2c)}{\omega}e^{-i\omega\ell/2c} & e^{-i\omega\ell/c}\end{pmatrix} \tag{6-55}$$

という行列を考えればよい．この行列は基本的には遅延要素であるが，空間を伝播する光と重力波の相互作用を表す重要な要素である．また，振幅透過率 t と反射率 r をもつ鏡の透過行列 $\mathbf{T}$ と反射行列 $\mathbf{R}$ は

$$\mathbf{T} = t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = ir\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \tag{6-56}$$

となる．

では，この方法で FP 干渉計を扱ってみよう．これは次の方程式を解くことで得られる．

$$\mathbf{A}_r = \mathbf{R}_1\mathbf{A}_i + \mathbf{T}_1\mathbf{A}_2 \tag{6-57}$$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{D}\mathbf{R}_2\mathbf{D}\mathbf{A}_1 \tag{6-58}$$

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{T}_1\mathbf{A}_i + \mathbf{R}_1\mathbf{A}_2 \tag{6-59}$$

このとき，

$$\mathbf{A}_1 = (\mathbf{I} - \mathbf{R}_1\mathbf{D}\mathbf{R}_2\mathbf{D})^{-1}\mathbf{T}_1\mathbf{A}_i \tag{6-60}$$

$$\mathbf{A}_r = [\mathbf{R}_1 + \mathbf{T}_1\mathbf{D}\mathbf{R}_2\mathbf{D}(\mathbf{I} - \mathbf{R}_1\mathbf{D}\mathbf{R}_2\mathbf{D})^{-1}\mathbf{T}_1]\mathbf{A}_i = i\mathbf{F}\cdot\mathbf{A}_i \tag{6-61}$$

とすると，

$$F_{00} = r_1 + a(\Omega) \tag{6-62}$$

$$F_{11} = r_1 + a(\Omega + \omega) \tag{6-63}$$

$$F_{10} = -i\Omega a(\Omega)\frac{\sin(\omega\ell/c)}{\omega}e^{-i\omega\ell/c}\frac{h(\omega)}{1 + r_1r_2e^{-2i(\Omega+\omega)\ell/c}} \tag{6-64}$$

となる．ここで，$a(\Omega)$ は式 (6-28) で定義されている．もし，搬送波が共振条件を満たすと，

$$F_{10} = i\Omega\alpha_c\frac{\sin(\omega\ell/c)}{\omega}e^{-i\omega\ell/c}\frac{h(\omega)}{1 - r_1r_2e^{-2i\omega\ell/c}} = iH_{FP}(\omega)h(\omega)/2 \tag{6-65}$$

となり，式 (6-36) の結果と一致する．

6-4　検出器の構成

ここでは実際に使われる検出器の構成について述べる．図 6-6 は FP 方式の重力波検出器の模式図である．レーザーを出た光はモードクリーナーと呼ばれる FP 共振器に入る．このモードクリーナーは入射光の空間的なモードを整形し，周波数雑音を制御するための周波数の基準の役目もする．現在の計画ではこの共振器にはリング型共振器を用いる方式が主流になっている．それは，リング型共振器が進行波型の共振器で，干渉計本体の共振器からの戻り光と結合しにくいためである．

そして，これを透過した光はビームスプリッターで 2 つに分けられて主共振器に入る．これは基線長が 3km から 4km ある巨大な FP 共振器である．主共振器から反射して戻ってきた光は再びビームスプリッターで合わされて干渉し，光検出器に入る．

光源には感度を上げるため後述のように大出力のレーザーが必要である．レーザーとしては，半導体レーザー励起 Nd:YAG レーザーが主流になった．このレーザーは非常に効率が高く，大出力化が可能で，さらに励起源からの雑音が小さいなどの有利な点をもっていて，従来から使われてきた Ar イオンレーザーに取って代わったのである．さらに，レーザーには光源のもつ雑音を抑えるための安定化システムが必要となる．

主共振器では全光路長を決めても，実基線長と折り返し回数 (フィネス) の組み合わせの自由度が残されているが，実基線長を長くする方が，鏡の熱雑音や地面振動などの外乱の影響を小さくできるので有利である．ただ，実際には他の技術的な問題や費用，設置場所の問題があり可能な距離は数 km が限界であろう．しかし，このような巨大な光学系は未だかつて人類が経験したことがないものである．そのため，必要とされる精度は非常に高く，光学技術の極限が要求される．

また，干渉計全体では非常に大きなパワーの光を扱わなければならない．そのため，光学部品を構成する基材やコーティングに僅かな損失があっても命取りになる．さらに，ミラー自身は弾性体であり，熱振動を行っている．この熱振動の大きさは，ミラーの機械的な損失 (と温度) によって決まっているので，機械的にも非常に低損失の材料が要求される．このような要求は，いままでの光学材料にはなかったことであり，新しい視点での材料の開発と評価が必要である．

干渉計の感度を上げる方法としてはリサイクリングと呼ばれる技術が提案 [Drever 1983]，開発されている．これはレーザーから干渉計に入った光が干渉計から反射されてくるので，これを再び M_0 という鏡を用いて干渉計の内部へ戻し，等価的に光源のパワーを増大させる方法である．この時，パワーをどの程度増大できるかは，干渉計全体の損失に反比例する．したがって，一層，低損失で高精度の光学要素が要求されている．

また，非常に重要な役割を果たすのが防振系と制御系である．干渉計を構成するほとんどの光学要素は振り子のように吊り下げられて支持される．そして，その振り子はさらに防振装置の上に設置される．振り子を含む防振系は外乱振動を減衰させる役目をもち，これが十分でないと意味のある測定ができない．しかし，このような系は低い周波数に機械共振があり，その共振周波数付近では大きな揺れをもつ．そのため，干渉計が安定に動作するためには複雑な制御系が必要である．この制御系の安定度は干渉計の長期運転の際にも重要な要素となる．

さらには，全体を納める真空装置が必要である．キロメートルクラスの干渉計で，残留ガスの揺らぎが光路長に及ぼす影響をなくすためには，内部の真空度を 10^{-6}Pa 程度に保たなければな

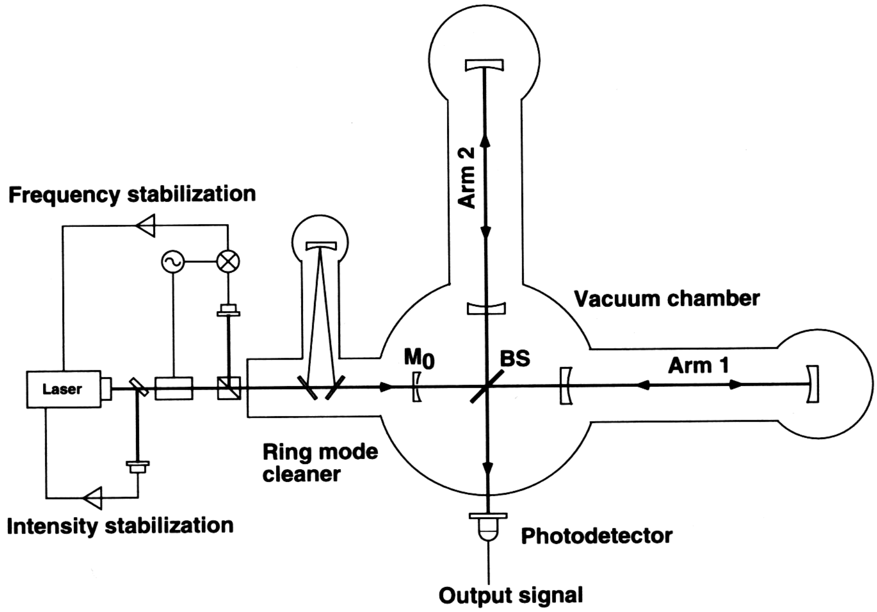


図 6-6　FP 型重力波検出器の構成. レーザーからでた光は, モードクリーナーと呼ばれる FP 共振器に入る. このモードクリーナーは入射光の空間的なモードを整形し, 周波数雑音を制御するための周波数の基準の役目もする. これを透過した光はビームスプリッター (BS) で 2 つに分けられて基線長が 3km から 4km ある巨大な FP 主共振器に入る. 主共振器から反射して戻ってきた光は再びビームスプリッターで合わされて干渉し光検出器に入る. さらに光源のもつ周波数や強度雑音を抑えるための安定化システムが組み込まれている. M_0 はリサイクリングミラーで干渉計内の等価的なパワーを高め散射雑音を抑える役目をもつ. 干渉計全体は巨大な真空槽に納められる.

らないと考えられている. この真空度は素粒子加速器などに比べればあまり高いものではないが, 排気しなければならないものの容積と表面積が非常に大きいために, 多くの排気装置が必要である.

6-5　大型計画

干渉計を使った重力波の検出実験は 1970 年代に始まり, プロトタイプと呼ばれる基線長が数十 m の干渉計を用いて行われてきた [Giazotto 1989]. そして, 90 年代になり, 世界各地で相次いで大型レーザー干渉計の建設計画が認められて, 開始された (表 6-1). ここでは, その概要を説明しよう [Abramovici et al. 1995].

現在, 先頭を走っているのはアメリカで, 大型計画が 1992 年度より正式にスタートしている. LIGO (Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory) と名づけられたカリフォルニア工科大学 (Caltech) とマサチューセッツ工科大学 (MIT) の合同チームの計画は, 4km×4km の大型レーザー干渉計をワシントン州とルイジアナ州に各 1 台ずつ設置しようとするものである. 2 台の干渉計建設のための予算として当初, 約 2 億ドルの要求が認められた. さらに, 1994 年には予算規模が 3 億 6000 万ドルに増額された. そして, 各大学の研究施設を用いた R&D と, 両方のサイトで干渉計の建設が進められている.

ヨーロッパでは 2 つの国際協力プロジェクトが進行している. 1 つは VIRGO とよばれるイタリアとフランスの合同プロジェクトであり, 3km の干渉計をイタリアに建設する計画である

[VIRGO 1992]. こちらも 1993 年に両政府から正式の承認を得て, 建設が開始された. 干渉計はイタリアのピサの近くの Casina というところで建設が開始された. この計画の一番のポイントは低周波 (~ 10Hz) の重力波を狙っていることである. そこで, 非常に大がかりな防振装置の開発を精力的に行っている.

もう 1 つはドイツのマックス・プランク研究所と英国のグラスゴー大学の連合チームで, 共同で 600m の基線長をもった干渉計を作る計画である (GEO600) [Danzmann et al. 1994]. これは, デュアルリサイクリングと呼ばれる技術を用い [Meers 1988], 干渉計の感度を制御し, 特定の周波数の信号に対して高い感度をもたせたりすることが可能な設計になっている. そして, そのような先進の技術を利用し, 短い基線長でも, LIGO や VIRGO に匹敵する感度を目指している.

日本では全国的な組織を結成してレーザー干渉計のための基礎研究開発を推進しており, これまでにもいくつかの研究成果があがっている. 重力波源の位置や波形の詳しい情報を得るには, 世界的な重力波観測のネットワークが必要であり, 日本にも大型レーザー干渉計を建設することが望まれる. 将来の大型計画についてはまだ青写真ができあがっていないが, 1995 年より 5 年間の計画で国立天文台の三鷹キャンパスに 300m の干渉計を建設する計画が始まった (TAMA 計画). この計画では, 最終的な (重力波を検出可能な) 感度を実現するのは困難であるが, キロメートルサイズの干渉計を実現し, さらに感度を上げて宇宙の果てを重力波で眺めるための技術的な蓄積を一番の目的としている.

この他, オーストラリアでも大型干渉計の計画が議論されているが, 予算化の見通しはいまの所ない.

表 6-1　世界の大型レーザー干渉計重力波検出器計画. 方式の FP はファブリ-ペロー方式, DR はデュアルリサイクリング方式を表す.

プロジェクト名	主な参加機関	計画内容
LIGO	アメリカ: Caltech, MIT	FP 4km 2 基
VIRGO	イタリア: IFNF, Pisa Univ.	FP 3km
	フランス: CNRS	
GEO 600	ドイツ: Max Planck Inst.	DR 600m
	イギリス: Glasgow Univ.	
TAMA	日本: 国立天文台, 東京大学, 電気通信大学, KEK	FP 300m

6-6　干渉計における雑音

干渉計が期待される感度を実現するまでには数多くの雑音を克服しなければならない. 雑音の原因はさまざまであるが, 大きく分けて以下の 4 つの原因がある.

- 光源: 散射雑音, 周波数雑音, 強度雑音, 輻射揺らぎによる反跳雑音, ビームジッター雑音
- 熱雑音: 振り子, 鏡やワイヤーの弾性振動
- 外来振動: 常時微動, 地震, 人工雑音
- その他: 光路の屈折率揺らぎ, 量子論的不確定性, 電磁波, 宇宙線

これらの雑音源がどのような寄与をもつかは，観測したい周波数に依存している．20 ～ 30Hz 以下の低周波側では地面振動の影響，そこから 100 ～ 200Hz までは振り子の熱雑音，それ以上では光の散射雑音が支配的になると考えられている．

また，干渉計の基線長との関係を考えてみる．詳しい議論は後に述べるが，散射雑音は最適化を行うと，基線長には関係がなくなる．しかし，熱振動や地面振動などで鏡が実際に振動している場合は，基線長を長くすることで影響を小さくできる．基線長がキロメートルを越えるような，巨大な干渉計が必要となる理由はここにある．干渉計の読み取り精度をいくら上げても鏡が振動している場合は重力波の信号と区別ができないのである．

以下，それぞれの雑音について述べる．

6-6-1　光の散射雑音

重力波に対する感度を議論するためには雑音を考えなければならない．最も原理的な雑音は光が光量子であることに起因し，光電流の散射雑音となって現れる．そのパワースペクトルは

$$\langle {i_{\rm n}}^2 \rangle = 2eI_{\rm P} \tag{6-66}$$

である [桜井，霜田 1984]．いま，

$$\Delta\phi = \Phi_0 + \delta\phi \tag{6-67}$$

として，式 (6-2) を用いて光電流の変化を計算すると

$$\delta I_{\rm P} = -(I_{\rm eff}/2)\sin\Phi_0 \cdot \delta\phi \tag{6-68}$$

となる．ここで

$$I_{\rm eff} = I_{\max} - I_{\min} \tag{6-69}$$

である．これが，光電流の散射雑音に等しいところで検出できる最小の位相変化量が決まる．すなわち

$$(I_{\rm eff}/2)\sin\Phi_0 \cdot \delta\phi_{\min} = \sqrt{2eI_{\rm dc}} \tag{6-70}$$

$$I_{\rm dc} = (I_{\max} + I_{\min} + I_{\rm eff}\cos\Phi_0)/2 \tag{6-71}$$

である．これから $\delta\phi_{\min}$ は Φ_0 の値によることがわかる．理想的な場合を考えると $I_{\min} = 0$ なので

$$\delta\phi_{\min} = \frac{\sqrt{eI_{\max}(1+\cos\Phi_0)}}{(I_{\max}/2)\sin\Phi_0} = \sqrt{\frac{2e}{I_{\max}}}\frac{1}{\sin(\Phi_0/2)} \tag{6-72}$$

であり，$\Phi_0 = \pi$ で最小になる．このとき光検出器のところでは 2 つの光が打ち消し合った状態となるのでダークフリンジ条件と呼ばれている．また，この点ではほとんど光が検出器に到達しないので検出器のダイナミックレンジの点でも有利である．

しかし，この状態では信号も 1 次では零になるので，光路長に変調を掛けて同期検波を行い信号を取り出す必要がある [Shoemaker et al. 1988]．すなわち，式 (6-2) に対して $\Delta\phi \to \Delta\phi + m\sin\omega_{\rm m}t$ のように $\omega_{\rm m}$ で位相変調を行う．すると光電流は

$$I(t) = I_{\min} + (I_{\rm eff}/2)[1 + \cos(\Delta\phi + m\sin\omega_{\rm m}t)] \tag{6-73}$$

と表される．そして，n 次の第 1 種ベッセル関数 $J_n(x)$ を用いた

$$e^{im\sin\omega_m t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) e^{in\omega_m t} \tag{6-74}$$

という公式を用いて式 (6-73) を書き下すと

$$I(t) \approx I_{\min} + (I_{\text{eff}}/2)[1 + J_0(m)\cos\Delta\phi - 2J_1(m)\sin\Delta\phi\sin\omega_m t + 2J_2(m)\cos\Delta\phi\cos 2\omega_m t] \tag{6-75}$$

となる．$\Delta\phi = \pi + \delta\phi$ としてダークフリンジの近傍での位相変化を考えると

$$I(t) \approx I_{\min} + (I_{\text{eff}}/2)[1 - J_0(m) + 2J_1(m)\delta\phi\sin\omega_m t - 2J_2(m)\cos 2\omega_m t] \tag{6-76}$$

である．そこで，この信号に $\sqrt{2}\sin\omega_m t$ を掛けて復調すると信号は

$$I_s = \sqrt{2}(I_{\text{eff}}/2)J_1(m)\delta\phi \tag{6-77}$$

となる．また，雑音は非定常光[4)] の影響を無視すると直流成分のもつ散射雑音の ω_m 成分が復調信号に現れるので

$$I_n = \sqrt{2e\{I_{\min} + (I_{\text{eff}}/2)[1 - J_0(m)]\}} \tag{6-78}$$

この比 (I_s/I_n) を最適にする m を選べばよい [Shoemaker et al. 1988]．もし，$I_{\min} = 0$ とすれば

$$\delta\phi = \frac{\sqrt{2eI_{\max}[1 - J_0(m)]/2}}{\sqrt{2}I_{\max}J_1(m)/2} \to \sqrt{\frac{2e}{I_{\max}}} \quad (m \to 0) \tag{6-79}$$

となって，式 (6-72) の結果と一致する．

いま，レーザー光のパワーを P，光検出器の量子効率を η とすると，

$$I_{\max} = e\frac{\eta P}{\hbar\Omega} \tag{6-80}$$

だから，

$$\delta\phi_{\min} = \sqrt{\frac{2\hbar\Omega}{\eta P}} \tag{6-81}$$

となる．この $\delta\phi_{\min}$ と重力波によって生じる位相変化が等しいところで検出できる最小の重力波の振幅が決まるのでパワースペクトルで表すと

$$\delta\phi_{\text{GR}} = \sqrt{\frac{2\hbar\Omega}{\eta P}} \tag{6-82}$$

となる．

この計算を FP の場合に当てはめてみると，等価的な位相変化は式 (6-39) で与えられ，また，検出器に到達するパワーは元のレーザーのパワー P_0 と

$$P = (r_1 - \alpha_c)^2 P_0 \tag{6-83}$$

4) 詳しくは後節で述べる．

という関係にあるので

$$\delta\phi_{\rm GR} = \sqrt{\frac{2\hbar\Omega}{\eta(r_1 - \alpha_{\rm c})^2 P_0}} \tag{6-84}$$

ところで,

$$\delta\phi_{\rm GR} = \frac{|H_{\rm FP}|\delta h}{|r_1 - \alpha_{\rm c}|} \tag{6-85}$$

だから, 側帯波の成分が元のレーザー光の散射雑音による側帯波の大きさと等しいと考えて

$$|H_{\rm FP}|\delta h = \sqrt{\frac{2\hbar\Omega}{\eta P_0}} \tag{6-86}$$

で計算すればよい [Meers 1988]. したがって, 観測帯域幅を Δf とすると

$$h_{\rm min} = \frac{\omega(1 - r_1 r_2)}{\alpha_{\rm c}|\sin(\ell\omega/c)|}\sqrt{\frac{\hbar[1 + F\sin^2(\omega\ell/c)]}{2\Omega\eta P_0}\Delta f} \tag{6-87}$$

が散射雑音限界を与える. 特に, $\omega\ell/c \ll 1$ かつ $1 - r_2 \ll 1 - r_1 \ll 1$ とすると

$$h_{\rm min} \approx \sqrt{\frac{\hbar[1 + (\tau_{\rm s}\omega)^2]}{2\Omega\eta P_0 {\tau_{\rm s}}^2}\Delta f} = \sqrt{\frac{\hbar\lambda[1 + (\tau_{\rm s}\omega)^2]}{4\pi c\eta P_0 {\tau_{\rm s}}^2}\Delta f} \tag{6-88}$$

$$\tau_{\rm s} = \frac{\ell\sqrt{F}}{c} = \frac{2\ell}{c}\frac{\sqrt{r_1 r_2}}{1 - r_1 r_2} \tag{6-89}$$

と表される. いずれにしても, これで制限される位相変化の最小値 (ショットノイズリミット) は光源の出力の平方根に反比例するので, 干渉計型重力波検出器の光源には大出力が要求される. 例えば, 重力波の信号の周波数を 1kHz とし, 帯域も 1kHz で, $h = 10^{-21}$ を実現するためには, 波長 1μm の光を使うと 1kW の出力が必要になる. これをレーザー単体で実現するのは非常に厳しい条件であるが, リサイクリングにより, 数 10W のレーザーを用いて必要な感度を実現できると考えられている.

6-6-1-1　損失と感度　以上の議論では干渉計内にはまったく損失が無い場合を仮定してきたので, 折り返し回数 (またはフィネス) と実基線長の積だけが感度に関係しているようにみえる. しかし, 実際には鏡などに損失があると感度が制限される. 損失がある場合, FP の場合は式 (6-88) が

$$h_{\rm min} = \left(\frac{{t_1}^2 + {\sigma_1}^2 + {t_2}^2 + {\sigma_2}^2}{{t_1}^2}\right)\sqrt{\frac{\hbar[1 + (\tau_{\rm s}\omega)^2]}{2\Omega\eta P_0 {\tau_{\rm s}}^2}\Delta f} \tag{6-90}$$

$${r_i}^2 + {t_i}^2 + {\sigma_i}^2 = 1 \ \ (i = 1, 2) \tag{6-91}$$

で σ^2 は鏡の損失を表す. もし, $t_2 \ll t_1$, $\sigma_1 \sim \sigma_2$ ならば感度は $(1 + 2\sigma^2/{t_1}^2)$ だけ悪くなる. また, この式を見ればわかるように損失の影響はフィネスに比例して大きくなるので長い基線の干渉計を使って折り返しの回数を減らし, 損失の影響を抑えることが重要である. もちろん, これらは鏡の損失の大きさ自身にもよっているから, 損失の少ない鏡ができれば制限は緩くなる.

6-6-1-2　非定常散射雑音　内部変調法を用いて信号を取り出す場合やパウンド-ドレーバー (Pound-Drever) 法でレーザーを FP 共振器にロックする場合, 光検出器には変調信号の 2 倍の周波数で強度変調された光が現れる．このような時間的に強度が変化する光の散射雑音は非定常性をもち, 信号を取り出すために変調周波数と同じ周波数で同期検波すると変調—復調の関数系によっては SN 比が劣化するということが指摘された [Niebauer et al. 1991].

いま, 光 (角周波数 Ω) のパワーが $P(t)$ のように時間的に変動しているとすると, その散射雑音 $P_{\rm n}(t)$ の自己相関関数は

$$\langle P_{\rm n}(t)P_{\rm n}(t')\rangle = \hbar\Omega P(t)\delta(t-t') \tag{6-92}$$

のように与えられる．この相関関数は $|t-t'|$ の関数ではなく陽に t を含んでいるので雑音が非定常過程であることを示している．しかし, いまの場合は非定常過程では一番簡単なもので

$$P_{\rm n}(t) = \sqrt{2\hbar\Omega P(t)}\, u(t) \tag{6-93}$$

のように定常的な雑音とその振幅を与える時間の関数の積で書くことができる．ここで $u(t)$ は単位白色雑音で

$$\langle u(t)u(t')\rangle = \frac{1}{2}\delta(t-t') \tag{6-94}$$

を満たす．このような非定常過程ではパワースペクトルの定義が難しいが, フーリエ変換を計算する時間が強度変化の典型的な周期よりも十分長い時には

$$G_P(f) = 2\hbar\Omega\overline{P(t)} \tag{6-95}$$

のように書ける．ここで, $\overline{\quad}$ は時間平均を表す．そして, これに復調関数 $d(t)$ を掛けると, その出力での雑音は

$$y(t) = d(t)\sqrt{2\hbar\Omega P(t)}\, u(t) \tag{6-96}$$

と表され, そのスペクトルは

$$G_y(f) = 2\hbar\Omega\, \overline{d(t)^2 P(t)} \tag{6-97}$$

で与えられる．もしパワーの強度変化と復調関数が

$$P(t) = P_{\rm DC} - \Delta P\cos 2\omega t \tag{6-98}$$

$$d(t) = \sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi) \tag{6-99}$$

の場合にはスペクトルは

$$G_y(f) = 2\hbar\Omega\left(P_{\rm DC} + \frac{\Delta P\cos 2\varphi}{2}\right) \tag{6-100}$$

となり, 復調関数の位相によって雑音の値が変化する．式 (6-76) を見ると

$$P_{\rm DC} \propto I_{\rm min} + (I_{\rm eff}/2)[1 - J_0(m)] \tag{6-101}$$

$$\Delta P \propto I_{\rm eff}\, J_2(m) \tag{6-102}$$

$$\varphi = 0 \tag{6-103}$$

という対応が成り立つので, この場合の散射雑音は

$$I_{\rm n} = \sqrt{2e\{I_{\rm min} + (I_{\rm eff}/2)[1 - J_0(m) + J_2(m)/2]\}} \tag{6-104}$$

で計算され, もし, $I_{\rm min} = 0$ の場合は

$$\delta\phi = \frac{\sqrt{eI_{\rm max}[1 - J_0(m) + J_2(m)/2]}}{\sqrt{2}I_{\rm max}J_1(m)/2} \to \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{2e}{I_{\rm max}}} \ \ (m \to 0) \tag{6-105}$$

となり, 式 (6-72) の結果よりも悪い値となる. この現象は信号の情報をもたない変調によって生じた側帯波の回りの真空揺らぎが混入するために生じることが示され, 実際に外部変調法で光強度がほとんど変化しないような状態で信号を取り出す時 (すなわち雑音自体は定常過程) にも SN 比が劣化する原因もこれと同じであるとされた [Meers and Starin 1991]. また, 実際にこのような現象がはっきり存在していることが干渉計を用いない簡単な実験で示されている [Mio and Tsubono 1992]. この影響を避けるためには矩形波を使って変復調する方法や, 高調波を混ぜて復調する方法が考えられ [Niebauer et al. 1991], 実験で確かめられた [Gray et al. 1993].

6-6-2　光源による雑音

光源となるレーザーは決して理想的なものではない. 光源の周波数雑音, 強度雑音, ビームジッター雑音などが干渉計の信号に影響を及ぼす. これらの雑音を除くには, 光源を安定化し, 干渉計の 2 本の腕のバランスを非常に良くとらなければならない. 安定化に関してもバランスをとることに関しても技術的にやさしいことではなく, 片方のみの技術を高めても全体としての要求を満たすことはできない. ここでは, このような雑音が干渉計にどのように影響するかを考え, 安定化の技術に関しては別のところで述べる.

6-6-2-1　レーザーの周波数雑音　光源の雑音のうちで一番要求が厳しいのは周波数雑音 (位相雑音) である. いま, 入射レーザー光が

$$A(t) = A_0{\rm e}^{{\rm i}\phi(t)} = A_0{\rm e}^{{\rm i}[\Omega t + \phi_{\rm n}(t)]} \tag{6-106}$$

で与えられるとする. ここで $\phi_{\rm n}(t)$ はレーザーの位相雑音でこれを

$$\nu_{\rm n}(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{{\rm d}\phi_{\rm n}(t)}{{\rm d}t} \tag{6-107}$$

のように時間微分したものが周波数雑音である.

FP に対して入射光が共振している場合には, 重力波も周波数雑音の影響も反射光 (または透過光) の位相変調信号として現れる. 光源の位相雑音は 1 つの腕の反射光には

$$\delta A_{\rm FP}/A_0 = {\rm i}\int \phi_{\rm n}(\omega)H_{\rm FM}(\omega){\rm e}^{{\rm i}\omega t}{\rm d}\omega \tag{6-108}$$

のような側帯波として現れる. ここで

$$H_{\rm FM}(\omega) = \frac{r_1 - r_2({t_1}^2 + {r_1}^2){\rm e}^{-2{\rm i}\omega\ell/c}}{1 - r_1r_2{\rm e}^{-2{\rm i}\omega\ell/c}} \tag{6-109}$$

は, 周波数雑音に対する応答関数で, $\phi_{\rm n}(\omega)$ は光源の位相雑音のフーリエ成分である. 干渉信号には 2 つの腕の雑音の差が現れるので, 両腕の基線長と FP を構成する鏡の反射率と透過率が一致していればキャンセルされる. したがって, 周波数雑音で決まる等価的な重力波の感度は

$$\langle h(\omega)_{\rm FM}{}^2\rangle = \left|\frac{H_{\rm FM}^{(1)}(\omega) - H_{\rm FM}^{(2)}(\omega)}{H_{\rm FP}(\omega)}\right|^2 \langle\phi_{\rm n}(\omega)^2\rangle \approx \Gamma_{\rm CMR}^2 \left|\frac{H_{\rm FM}(\omega)}{H_{\rm FP}(\omega)}\right|^2 \langle\phi_{\rm n}(\omega)^2\rangle \qquad (6\text{-}110)$$

となる. また,

$$\Gamma_{\rm CMR} = 2\left|\frac{H_{\rm FM}^{(1)}(\omega) - H_{\rm FM}^{(2)}(\omega)}{H_{\rm FM}^{(1)}(\omega) + H_{\rm FM}^{(2)}(\omega)}\right| \qquad (6\text{-}111)$$

は両腕の FP の特性の差を表すものであり, 同相信号除去比と呼ばれている.

大型干渉計では FP のフィネスはあまり高くする必要はない. $\ell = 3\text{km}$ で 100Hz の重力波を受けるためには $\tau_{\rm s} \sim 1/\omega_{\rm GR} = 1.6\text{msec}$ でよい. この時必要なフィネスは 250 で, それに相当するニアミラーの反射率 (エンドミラーは完全反射とする) は 97.5%である. 両腕の基線長がまったく等しいとすると反射率で 0.1%の差は $\tau_{\rm s}$ で約 4%の差になる. 現在のコーティングの技術では小型のミラーならば反射率を 0.1%以下の精度で制御できるのでさらに 1 桁程度は向上できるかも知れないが, 大型ミラーの場合にはどうなるかはまったく不明である. いまのところ FP からの反射を干渉させて測定を行った例は僅かである [Shoemaker et al. 1991]. 日本の研究グループでは, 3m の基線長の自由質量型干渉計を用いた測定で 1.2×10^{-3} 程度の同相除去比を得たが, 20m の干渉計では 0.1 程度であった [Kawabe et al. 1996, 大橋 1994]. この差は使われた鏡の精度に起因していると考えられているが, 完全に原因が解明された訳ではない. さらに大型の干渉計でどの程度の同相除去比が取れるかはこれからの課題であろう.

6-6-2-2 レーザーの強度雑音 干渉計を用いて位相の情報を取り出す場合, 光検出器で強度変化に変換してから信号として取り出す. この場合に入射光源のもつ強度の変化 (強度雑音) と信号による強度の変化を分離する必要がある.

変調法では光に位相変調を掛け, 干渉計での位相変化と光源の強度変化の周波数帯を分離することで強度雑音の影響を取り除いている. 式 (6-75) で光源の強度が揺らいでいるとすると

$$I(t) = [1 + \delta I(t)/I_0]\{I_{\rm min} + (I_{\rm eff}/2)[1 + J_0(m)\cos\phi - 2J_1(m)\sin\phi\sin\omega_{\rm m}t]\} \qquad (6\text{-}112)$$

と表され[5], $\Delta\phi = \Phi_0 + \delta\phi$ とし, $\sin\omega_{\rm m}t$ を掛けて復調すると,

$$\begin{pmatrix} \text{復調信号の} \\ \omega\text{成分} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\delta I/I_0)(I_{\rm min} + (I_{\rm eff}/2)[1 + J_0(m)\cos\Phi_0])\ \text{の} \\ \omega_{\rm m} \pm \omega\text{成分} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_{\rm eff}\, J_1(m)[(\delta I/I_0)\sin\Phi_0 + \delta\phi\cos\Phi_0]\ \text{の} \\ \omega\text{成分} \end{pmatrix}$$

となる. 一般に $\omega_{\rm m}$ は δI が散射雑音に到達する周波数に選ばれるので第 1 項からの寄与が散射雑音になる. また, 第 2 項目では, $\Phi_0 = \pi$, すなわちダークフリンジとすることで位相変化による寄与を最大にし, かつ, 強度雑音の影響を低減している. しかし, 現実には低周波では大きな揺

5) 非定常項は無視した.

れがあり, $\Phi_0 = \pi$ を維持するサーボループのゲインが不十分だとその成分と観測帯域の強度雑音がカップルして信号に現れてしまう. すなわち, 強度雑音の影響は

$$\delta\phi_{\mathrm{INT}} = \frac{\delta I}{I_0}\langle \Delta\Phi_0 \rangle_{\mathrm{rms}} \tag{6-113}$$

と表すことができて, $\langle \Delta\Phi_0 \rangle_{\mathrm{rms}}$ は強度雑音の影響が消える動作点の回りで干渉縞がどの程度揺らいでいるかの rms である. この値は制御を掛けない状態の揺らぎをその制御ループのゲインで割ったものであるから, 動作点を固定するサーボ系のゲインが十分大きくないと強度雑音を完全には除去できない.

6-6-2-3　ビームジッター雑音　レーザーの出力ビームはビーム径や方向が時間的に変化している. 干渉計が完全に対称にできていればやはりこれらの揺らぎは出力に現れてこない. しかし, 干渉計の非対称性やミスアラインメント, 光検出器の非一様性などがこれらの揺らぎと結合して現れる. このような揺らぎを取り除くにはモードクリーナーと呼ばれる FP 共振器を用いたり [Rüdiger et al. 1981], 単一モード光ファイバーを用いたりする [Shoemaker et al. 1988]. ただ, 光ファイバーは大きなパワーの光を入れることができないので, 大型干渉計ではモードクリーナーを使うことが計画されている.

基本的にはこれらの揺らぎは高次のガウシアンモードが励起されると考えればよいので, 十分孤立した TEM_{00} モードをもつ FP 共振器を通すことで除去できる. FP 共振器の共振周波数は

$$\nu_{n;lm} = \frac{c}{2d}[n + (l+m+1)\Lambda] \tag{6-114}$$

$$\Lambda = (\cos^{-1}\sqrt{g_1 g_2})/\pi \tag{6-115}$$

$$g_i = 1 - \frac{d}{R_i} \quad (i = 1, 2) \tag{6-116}$$

で表され, R_i は鏡の曲率半径, d は鏡の間隔, Λ は縦モード間隔に対する横モード間隔の比である. ビーム方向の変化は第 1 次の, ビーム径の変化は第 2 次の高次モードに属し, これらの光の共振周波数は基本モードに対して $N\Lambda c/2d$ だけずれているので共振器を透過できなくなる. FP の透過光は

$$I_{\mathrm{t}} \propto \frac{1}{1 + [2\mathcal{F}\sin(2\pi\nu d/c)/\pi]^2} \tag{6-117}$$

となるので入射光が基本モードに共振しているときの N 次のモードの透過率は

$$\frac{I_{Nth-\mathrm{order}}}{I_{00}} = \frac{1}{1 + [2\mathcal{F}\sin(N\pi\Lambda)/\pi]^2} \tag{6-118}$$

で表せる. ここで共振器のフィネス $\mathcal{F}$ はすべてのモードで等しいと仮定した. これから, Λ すなわち共振器を構成する鏡の曲率をうまく選べばこれらの揺らぎを落とすことができる.

ここで, 一番問題なのはどの程度モードクリーナーで除去したら干渉計の出力に影響を及ぼさなくなるかの議論が定量的には難しいことである. 効率よく除去するにはフィネスの高い共振器が必要であるが, 透過効率の問題や高出力のレーザーに対して鏡で発生する熱, 高反射率コーティングの破損などの問題が発生する. そのため, フィネスはあまり高くしないで, モードクリーナーを 2 段にする構成も計画されている [Danzmann et al. 1994]. また, レーザー自身がどのくらい

のビームジッターをもっているかにも依存する．モノリシックな構造をもつ LD 励起 Nd:YAG レーザーは，従来のアルゴンレーザーに比べて，ビーム方向の揺らぎも小さいことが示されているが [Skeldon and Hough 1995]，本格的な干渉計に用いられるような大型レーザーではまだ不明である．

6-6-3　熱 雑 音

実際の検出器は有限温度の熱浴に接しているため，さまざまな部分で熱振動が起こる [Braginsky et. al 1994b]．この雑音を低減するためには，

1) 温度を下げる
2) 振動子の機械的な Q を上げる

等の方法がある．ただ，力学系の熱振動では共振系の共振周波数から大きく離れた部分での熱雑音はまだ不明確なところが多いのでさらに研究が必要である．

6-6-3-1　熱振動の一般論　一般に機械的な振動は振動のモードに注目すれば 1 つの調和振動子と考えることができて，

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+kx=0 \tag{6-119}$$

という運動方程式に従う．ここで，m は通常は質点の質量を表すが一般的には観測しているモードの換算質量になる [Hirakawa et al. 1976]．このような振動子が温度 T の熱浴と接しているとブラウン運動を行う．これは式 (6-119) の右辺に熱雑音力が加わった形の

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+kx=f_{\mathrm{N}}(t) \tag{6-120}$$

という方程式で記述され [久保 1978]，f_{N} が熱雑音による揺動力である[6)]．一番簡単な場合には f_{N} は白色雑音でアインシュタインの関係式によって

$$\langle f_{\mathrm{N}}(t)f_{\mathrm{N}}(t')\rangle=2\gamma k_{\mathrm{B}}T\delta(t-t') \tag{6-121}$$

という相関関数をもつ．ここで，k_{B} はボルツマン定数である．そしてブラウン運動のパワースペクトルは

$$\langle x(\omega)^2\rangle=\frac{4\gamma k_{\mathrm{B}}T}{|-m\omega^2+\mathrm{i}\omega\gamma+k|^2} \tag{6-122}$$

となる．この式ではスペクトルは単位周波数あたりの片側パワースペクトルを表すので

$$\int_0^{\infty}\langle x(\omega)^2\rangle\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}=\frac{k_{\mathrm{B}}T}{m{\omega_0}^2}\quad\left({\omega_0}^2=\frac{k}{m}\right) \tag{6-123}$$

を満たす．考えている周波数が共振点から十分に離れている時を考えると，

$$\langle x(\omega)^2\rangle\sim\frac{4k_{\mathrm{B}}T}{m{\omega_0}^3Q}\quad(\omega\ll\omega_0) \tag{6-124}$$

$$\sim\frac{4\omega_0k_{\mathrm{B}}T}{m\omega^4Q}\quad(\omega\gg\omega_0) \tag{6-125}$$

---

6) このように揺動力を含む方程式はランジュバン方程式と呼ばれる．

となる．ここで，$\gamma = m\omega_0/Q$ という関係を使った．いずれの場合にも，T/Q に比例しているため，前述のように温度を下げて Q の高い材質，形状を採用することでその影響を小さくできる．

6-6-3-2　一般的な損失をもつ調和振動子の熱振動　これまでは減衰力が単純に速度に比例している場合を考えたが，損失が物質の内部で起こる場合の機構はもっと複雑で，比例係数が周波数に依存している．このような系の応答は，$k \to k[1+\mathrm{i}\phi(\omega)]$ のように周波数領域での複素バネ定数で表すとよい [Saulson 1990]．こうすると運動方程式は周波数領域で

$$m\left\{-\omega^2 + {\omega_0}^2[1+\mathrm{i}\phi(\omega)]\right\} x(\omega) = f(\omega) \tag{6-126}$$

のように書け，共振の Q は $Q = 1/\phi(\omega_0)$ で与えられる．もし，

$$\phi(\omega) = \gamma\omega/k \tag{6-127}$$

ならば単純な減衰力となるが，実際の測定例ではいろいろな物質で ϕ の周波数依存性は小さく，むしろ一定の値をもつように見えることが報告され，ϕ が一定というモデルが現実的だと考えられるようになってきた [Braginskii et al. 1992, Saulson et al. 1994, Kovalik and Saulson 1993, González and Saulson 1995][7)]．

このような場合には揺動力は簡単な白色雑音と考えることはできないが，揺動散逸定理によればブラウン運動のスペクトルは

$$\langle f_{\mathrm{N}}(\omega)^2\rangle = \frac{4m{\omega_0}^2\phi(\omega)k_{\mathrm{B}}T}{\omega} \tag{6-128}$$

$$\langle x(\omega)^2\rangle = \frac{4k_{\mathrm{B}}T}{\omega}\frac{{\omega_0}^2\phi(\omega)}{m|-\omega^2+{\omega_0}^2[1+\mathrm{i}\phi(\omega)]|^2} \tag{6-129}$$

となることが示される [久保 1978, Saulson 1990]．このときの共振から離れた点でのスペクトルは

$$\langle x(\omega)^2\rangle \sim \frac{4k_{\mathrm{B}}T}{\omega}\frac{\phi(\omega)}{m{\omega_0}^2}\ \ (\omega \ll \omega_0) \tag{6-130}$$

$$\sim \frac{4k_{\mathrm{B}}T}{\omega}\frac{{\omega_0}^2\phi(\omega)}{m\omega^4}\ \ (\omega \gg \omega_0) \tag{6-131}$$

となるが，もし，ϕ が定数だとすると $\omega \ll \omega_0$ のときには ω に反比例して大きくなっていくためその影響が深刻なものとなる．

以下の解析では，ϕ が一定というモデルを用いることにする．

6-6-3-3　振り子の熱雑音　振り子の場合には，復元力の大部分が損失のない重力のため，本来の損失 (ほとんどの損失はワイヤーの内部損失であると仮定する) で決まるものよりもずっと小さな損失が実現される [Saulson 1990]．いま，質量 M の重りを長さ ℓ のワイヤーで吊るした振り子に対して全体の復元力を計算すると

$$F = -\left(Mg/\ell + k_{\mathrm{el}}[1+\mathrm{i}\phi(\omega)]\right)x \tag{6-132}$$

7) もちろん，実際のシステムは実数で記述されるべきであるから $\phi(\omega)$ は ω の奇関数でなければならない．ここで “ϕ が一定” といっているのは式 (6-127) で示されような周波数に比例するような関係ではなく，周波数に対する依存性は弱いということである．

となるので, 復元力全体での位相遅れを計算すると

$$F = -\left(Mg/\ell + k_{\rm el}\right)\left[1 + {\rm i}\phi_{\rm p}(\omega)\right]x \qquad (6\text{-}133)$$

$$\phi_{\rm p} = \frac{k_{\rm el}}{Mg/\ell + k_{\rm el}}\phi \approx \frac{k_{\rm el}\ell}{Mg}\phi \qquad (6\text{-}134)$$

となる. $k_{\rm el}$ はワイヤーの弾性によるバネ定数で,

$$k_{\rm el} = \frac{\sqrt{TEI}}{2\ell^2} \qquad (6\text{-}135)$$

である. ここで, T はワイヤーの張力, E はヤング率, I は断面 2 次モーメントである. $T = Mg$ を使うと

$$\phi_{\rm p} \approx \frac{\phi}{2\ell}\sqrt{\frac{EI}{Mg}} \qquad (6\text{-}136)$$

となる. ただし, I は断面積の 2 乗に比例するスケーリングをもち, 断面積は張力 (Mg) に比例する (させないと切れてしまう) ので, 実際には重りの質量を大きくすると $\phi_{\rm p}$ は大きくなってしまう (つまり Q は悪くなる). しかし, 熱振動の 2 乗平均のスペクトルは質量に反比例するので, 最終的な熱振動の大きさ (2 乗平均の平方根) は $M^{-1/4}$ のスケールで小さくなる. また, ここでは損失の大きさが張力に依存しないとしたが, 張力によって損失が増える可能性があるので, さらなる検討を要する [Huang and Saulson 1994].

いま, 振り子の質量を $M = 10{\rm kg}$ で共振周波数を $f_{\rm p} = 1{\rm Hz}$ とする. このとき

$$\sqrt{\langle x(\omega)^2\rangle} \sim 2.6\times10^{-22}\left(\frac{10{\rm kg}}{M}\right)^{1/2}\left(\frac{f_{\rm p}}{1{\rm Hz}}\right)\left(\frac{\phi}{10^{-5}}\right)^{1/2}\left(\frac{1{\rm kHz}}{f}\right)^{5/2}{\rm m}/\sqrt{\rm Hz} \qquad (6\text{-}137)$$

となるので, 1kHz の信号に対しては十分である. 高純度合成石英を使った一体型の振り子では $Q > 10^7$ が記録されているので [Braginsky et al. 1993], 1 桁以上は感度が改善される可能性はある. また, 石英のファイバーと鏡を損失なく繋ぐための方策も検討されている [Logan et al. 1996].

多段振り子を用いる場合は各段の振り子の損失が結合するが共振モードよりも周波数が十分高いときにはこれらは分離して主な雑音源は鏡を直接支持している振り子の熱雑音になる. したがって, その振り子の Q を十分高くすることが重要である. また, ワイヤーの伸縮モードが光軸方向の運動と結合すると, その熱振動の寄与が加わる. 一般に, 伸縮モードの Q は低いので結合の大きさ次第ではかなりの寄与をもつ可能性がある. このため, ワイヤーの支持点を弾性体で支持して柔らかくし, 観測周波数帯での影響を逓減する方法が考えられている [Braccini et al. 1995].

6-6-3-4　ワイヤーの弦モード　実際の吊り糸は有限の線密度 σ をもっているのでそれ自身が弾性振動を行い,

$$\cos(\omega_n\ell/v) - (v\omega_n/g)\sin(\omega_n\ell/v) = 0 \quad \left(v = \sqrt{Mg/\sigma}\right) \qquad (6\text{-}138)$$

を満たす周波数が共振モードの周波数になる [Shoemaker et al. 1988]. このうち, 最低次の周波数は振り子運動の共振周波数を与え, それ以外は弦モードの周波数を決める. そして, 振り子モード以外の周波数は近似的に

$$\omega_n \approx n\pi\omega_{\rm p}\sqrt{\frac{M}{m}} \qquad (6\text{-}139)$$

で与えられる．ここで, $m\ (=\sigma\ell)$ はワイヤーの質量, $\omega_{\rm p} = \sqrt{g/\ell}$ は振り子の周波数である．このモードの換算質量は

$$\mu_n = \frac{M}{2}\left[1 + \frac{1}{\cos^2(\omega_n \ell/v)}\left(\frac{\omega_n}{\omega_{\rm p}}\right)^2\right] \tag{6-140}$$

と表される [Mio 1992].

この換算質量と共振周波数を用い, それぞれのモードに独立の損失を入れると熱雑音のスペクトルは

$$\langle x^2(\omega)\rangle = \sum_n \frac{4k_{\rm B}T}{\mu_n \omega}\frac{{\omega_n}^2 \phi_n}{({\omega_n}^2 - \omega^2)^2 + {\omega_n}^4 {\phi_n}^2} \tag{6-141}$$

となる．

さらに進んだ議論を行うためには, ワイヤーの弾性を考慮しなければならない [González and Saulson 1994]. この解析の結果, 弦モードの Q は, モードの次数にはほとんど依存せず, 基本の振り子モードの Q の約 1/4 となることが示された。このように弦モードと振り子モードの Q は関係がある。同様な結果は, 伝送線とアナロジーによって得られるが [Logan et al. 1993], この場合は振り子モードの Q の 1/2 となる．また, 別のかなり簡単な理論でも 1/2 という値が得られる [Gillespie and Raab 1993]. この差は, 振り子についている重りの大きさを考慮しているかいないかの差に依っている．

また, 弦モードの Q がほぼ一定ということは, 実験的に支持されている [Gillespie and Raab 1993, Gillespie and Raab 1994]. また, 基本の振り子モードの Q が高い振り子では弦モードについても非常に高い Q が得られている [Braginsky et al. 1994a].

6-6-3-5　鏡の熱雑音　こちらは鏡の機械共振による熱振動である．振り子よりも面倒なのは弾性振動のモードパターンを考えなければならないことである．これは, 振動モードのパターンによって干渉計のフリンジに与える影響が異なるために換算質量が変化するからである．鏡のような形状のモードでは一番単純なのは円柱の伸縮モードで, 鏡の端面は一様に運動するので寄与は一番大きくなり, 長い円柱では基本モードになる．この場合の換算質量と共振周波数は

$$m = \frac{M}{2}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}\frac{\pi}{L} \tag{6-142}$$

で与えられ, M, L, E, ρ はそれぞれ円柱の全質量, 長さ, ヤング率, 密度である．たとえば, 合成石英 ($\rho = 2.2 \times 10^3$ kg/m^3, $E = 7.31 \times 10^{10}$ N/m^2) で直径が 30cm で長さが 15cm の鏡を作る[8] とすると, $M = 23$kg, $f_0 = \omega_0/2\pi = 19$kHz で, $\phi = 10^{-5}$ とすると

$$\sqrt{\langle x(\omega)^2\rangle} \sim 4.1 \times 10^{-21}\left(\frac{12\text{kg}}{M/2}\right)^{1/2}\left(\frac{1\text{kHz}}{f}\right)^{1/2}\left(\frac{19\text{kHz}}{f_0}\right)\left(\frac{\phi}{10^{-6}}\right)^{1/2}\ \text{m}/\sqrt{\text{Hz}} \tag{6-143}$$

となる．

これ以外の振動モードでは, 円柱の固有振動を解析しなければならない．これに関しては非常に有効な近似法があり, 実験との一致も確かめられている [Hutchinson 1980]. この解析法を用いると, 従来は無視していた高次のモードの寄与がかなり大きいことがわかった [Gillespie 1995,

8) 3km の FP 干渉計で 1μm の光を使うと, 直径 30cm の鏡が必要とされる．

Boudu and Vinet 1995, Gillespie and Raab 1995]. これは, 高次モードの中には振動が表面に局在し中心付近に大きな振幅をもつものがあり, その換算質量が非常に小さいので熱雑音の寄与が大きくなるためである. しかも, ϕ が一定のモデルでは, 共振周波数が高くなっても共振よりも低周波側の雑音はあまり下がらないので, 一層深刻である.

詳しい計算によると, ビーム径を音速で割ったくらいの周期をもつ固有振動は熱雑音に寄与する. したがって, キロメートルクラスの干渉計では 100kHz くらいまでの振動モードの影響を考慮しなければならない. この結果, 式 (6-143) のような 1 つのモードに着目した推定の 2 倍から 3 倍, したがって, パワースペクトルの大きさでは 5 倍以上の差が見られる [Boudu and Vinet 1995]. また, これらのモードは鏡の形状 (円柱の場合は, 直径と高さの比) に依存しているので, 熱雑音の寄与が最小になるような形状を選ばなければならない.

合成石英では, 表面処理を行った後, いくつかのモードで $Q > 10^6$ が測定されている. しかし, 制御用の磁石などを装着すると急激な劣化が見られる. また, 高い Q を実現するためには鏡の材質だけでなく, 支持法も重要である [Logan et al. 1991, Logan et al. 1992].

6-6-4　地面振動による雑音

地面振動の影響は干渉計に組み込まれた防振系の性能と設置場所での地面振動の大きさによって決まる.

地面振動の典型的なスペクトルは

$$x_{\mathrm{seismic}} = 10^{-7}\left(\frac{1\mathrm{Hz}}{f}\right)^2 \ \mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}} \tag{6-144}$$

で表される [Shoemaker et al. 1988]. しかし, 日本において神岡鉱山, 京都大学防災研究所上宝観測所, 東京大学地震研究所筑波山観測所などの測定ではこれよりも約 2 桁小さいことがわかった. 図 6-7 はその測定結果である. この測定には我々が開発した高感度地震計を用いた [Araya et al. 1993]. これを見ると人工雑音の大きいところと小さいところではっきりと差が見える. この差は, 大型の干渉計を建設する場合の非常に重要な要素になるだろうと思われる. 防振系の防振比を Γ_{v} とすると

$$h_{\mathrm{seismic}} = \Gamma_{\mathrm{v}}\left(\frac{2x_{\mathrm{seismic}}}{\ell}\right)\sqrt{\Delta f} \tag{6-145}$$

で等価的な感度が決まる. 測定周波数が低くなればなるほど防振は困難になるので, 10Hz ぐらいまたはそれ以下の周波数ではこの雑音が支配的になる.

外乱を除去する防振の技術は干渉計全体の技術の中でも極めて重要な位置を占めるのはいうまでもない. しかし, 低い共振周波数をもった防振系は不安定になりやすく, これが干渉計の運転に与える影響は十分考慮しなければならない. このような問題, 実際の防振装置などの詳しい議論は別に行うことにする.

6-6-5　その他の雑音源

6-6-5-1　輻射揺らぎによる反跳雑音と量子限界　光が鏡で反射される場合, その光の運動量の変化分を鏡が受け取る. そして, 入射してくる光子の数が揺らぐと鏡が受ける力が変化し, 結局,

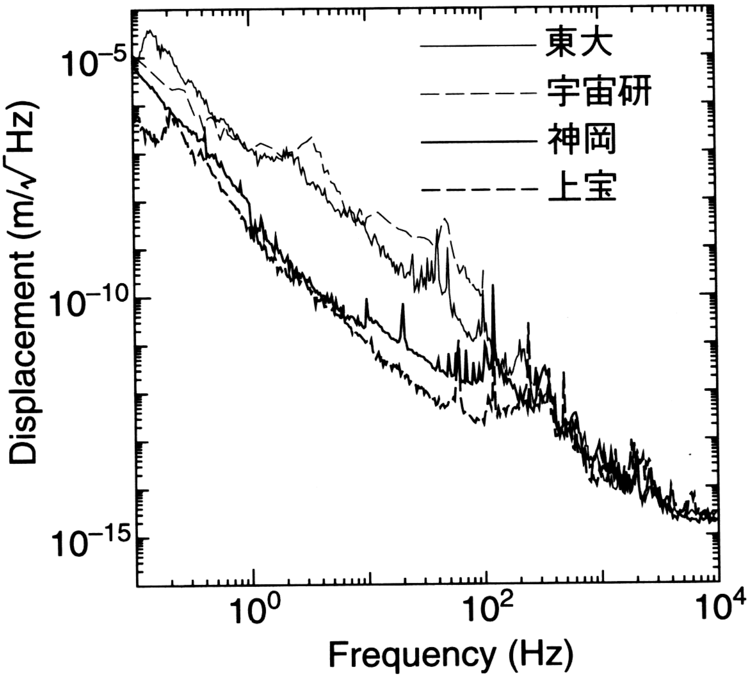


図 6-7　地面振動のスペクトル．各地で測定した地面振動のスペクトルで，都市部と山間部のトンネル内では非常にはっきりした差があり，大きなところでは 2 桁以上も大きさが異なる．しかし，スペクトルの周波数依存性に関しては，両方とも，およそ周波数の 2 乗に反比例している．

鏡の位置が揺らぐことになる．いま，入射してくる光の (角) 周波数を Ω とすると，光子のもつ運動量は $\hbar\Omega/c$ である．単位時間当たり鏡が受け取る運動量変化が鏡の受ける力 $f_{\rm ba}$ だから

$$f_{\rm ba} = 2\frac{\hbar\Omega}{c}\frac{P}{\hbar\Omega} = \frac{2P}{c} \tag{6-146}$$

と書き表される．ここで P は入射してくる光のパワーである．鏡の質量を M とすると運動方程式は

$$M\frac{{\rm d}^2x}{{\rm d}t^2} = f_{\rm ba} \tag{6-147}$$

である．ここで問題となるのは観測周波数帯の変動成分であるからスペクトルで考えると

$$\langle {x_{\rm ba}}^2(\omega)\rangle = \frac{4\langle \delta P^2(\omega)\rangle}{(M\omega^2c)^2} \tag{6-148}$$

で輻射揺らぎによる反跳雑音が決まる．もし，輻射揺らぎが光子統計で決まるような場合，入射光がコヒーレント状態ならば

$$\langle \delta P^2(\omega)\rangle = 2\hbar\Omega P \tag{6-149}$$

で与えられるので，パワーの大きいレーザーほど大きな影響をもつ．干渉計の読みだし誤差がパワーに反比例しているのと逆であるから，鏡の位置決定には最適のパワーが存在する．しかし，

この場合には量子力学的な不確定性関係まで考慮しなければならない．すなわち，巨視的な鏡でも干渉計の感度が向上すると，量子力学的な不確定性関係の影響が現れるのである．

例えば，自由質量の位置と運動量の演算子には

$$\hat{x}(t) = \hat{x}(0) + \frac{\hat{p}(0)t}{m} \tag{6-150}$$

$$\hat{p}(t) = \hat{p}(0) \tag{6-151}$$

という関係がある．これを用いると，ある時間 τ 後の位置の不確定量は

$$\langle \Delta\hat{x}(\tau)^2 \rangle = \langle \Delta\hat{x}(0)^2 \rangle + \langle \Delta\hat{p}(0)^2 \rangle \frac{\tau^2}{m^2} + \langle \Delta\hat{x}(0)\Delta\hat{p}(0) + \Delta\hat{p}(0)\Delta\hat{x}(0) \rangle \frac{\tau}{m} \tag{6-152}$$

と書けるが，不確定性関係より

$$\sqrt{\langle \Delta\hat{x}(0)^2 \rangle \langle \Delta\hat{p}(0)^2 \rangle} \geq \frac{\hbar}{2} \tag{6-153}$$

という条件がある．もし，式 (6-152) の左辺の第 3 項の寄与が問題にならないような条件のもとでは

$$\langle \Delta\hat{x}(\tau)^2 \rangle \ \geq \ \langle \Delta\hat{x}(0)^2 \rangle + \frac{1}{\langle \Delta\hat{x}(0)^2 \rangle} \left(\frac{\hbar\tau}{2m} \right)^2 \geq \frac{\hbar\tau}{m} \tag{6-154}$$

という制限が得られる[9]．ここで，等号が成り立つためには

$$\sqrt{\langle \Delta\hat{x}(0)^2 \rangle} = \sqrt{\frac{\hbar\tau}{2m}} = \Delta X_{\mathrm{SQL}} \tag{6-155}$$

が必要で，これが標準量子限界 (Standard Quantum Limit, SQL) である [Braginsky and Khalili 1992]．ただ，いまの議論には測定装置の雑音による影響は含まれていないので，これは内在的な不確定性 (intrinsic uncertainty) と呼ばれるものである．

それに対して干渉計で鏡の位置を測定する場合を考えると，位相を読む場合の誤差と光が鏡で反射されるときの反跳の揺らぎによる誤差が存在する．この両方を考えると

$$\langle x(\omega)^2 \rangle = \left(\frac{\lambda}{4\pi} \right)^2 \frac{2\hbar\Omega}{P} + \left(\frac{1}{m\omega^2} \right)^2 \frac{8\hbar\Omega P}{c^2} \geq \frac{4\hbar}{m\omega^2} \tag{6-156}$$

という制限が存在し，このときの光のパワーは

$$P_{\mathrm{opt}} = \frac{m\omega^2 \lambda c}{8\pi} \tag{6-157}$$

を満たさなければならない[10]．式 (6-156) は雑音のスペクトルなのでバンド幅を考えなければならないが，積分時間を τ としてバンド幅を $1/\tau$ とし，さらに $\omega\tau \sim 1$ とすると式 (6-154) とほぼ一致する．このような，測定系と被測定系が強く結合しているような場合には 2 つを独立に考えることはできないので，現実の測定誤差にはこれらの干渉項が現れ，あるモデルではそれが負に

9) 詳しい議論は文献 [山本, 渡部 1994] を参照されたい．

10) DL や FP のように折り返しを利用している場合は状況は複雑になるが，検出の量子限界を下げることはできない．

なりうることが示されている [Ni 1987]. ただ, 特殊な場合を除けば全体の不確定性は式 (6-156) で与えられるものと同程度の大きさと考えられるのでこれを計算すると,

$$\sqrt{\langle x(\omega)^2\rangle_{\mathrm{opt}}} = 1.03\times 10^{-21}\left(\frac{10\mathrm{kg}}{M}\right)^{1/2}\left(\frac{1\mathrm{kHz}}{f}\right)\ \mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}} \tag{6-158}$$

という値になる. もし, 干渉計の感度がこのオーダーに到達すると実際に巨視的な物体の量子力学が問題となってくるわけで, 物理学の根本に関わる議論が必要になる.

ただ, 通常, レーザーのパワーの揺らぎは式 (6-149) で決まる値よりもかなり大きな強度揺らぎをもつ. これはほぼ入射パワーに比例するので大出力のレーザーになればなるほど深刻である. このような強度雑音は両方の腕に共通の揺らぎを与えるため干渉計が完全に対称ならば干渉縞の変化には現れてこないはずだが, 実際にどの程度キャンセルされるかは明らかでない.

6-6-5-2　残留ガスの影響　干渉計の光路は屈折率の揺らぎを抑えるために真空に保たれるが, 残留ガスが存在し影響を及ぼす. この雑音は内部の真空度に依存しているため, 真空系の設計と大きく関係している. しかも, 真空装置の費用は大型検出器の建設費用のかなりの部分を占めるため, 正確な見積が必要である.

光路上の屈折率を $n(x,y,z,t)$ とするとこの中の光の伝播は

$$c^2\mathrm{d}t^2 = n(x,y,z,t)^2\left(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2\right) \tag{6-159}$$

によって決まる. いま,

$$n(x,y,z,t) = \bar{n} + \delta n(x,y,z,t)\ \ (\bar{n}\sim 1,\ \delta n \ll 1) \tag{6-160}$$

なので, 第 0 次の近似では $\delta n = 0$ として光路を与える関数 $(x_0(t),\ y_0(t),\ z_0(t))$ が決まる. これを使って δn の 1 次で近似した場合の光の位相は (DL を含む) マイケルソン干渉計の場合に

$$\delta\phi(t) = -\Omega\int_{t-L/c}^{t}\delta n[x_0(t'),y_0(t'),z_0(t'),t']\mathrm{d}t' \tag{6-161}$$

で与えられる[11]. ここで L は全光路長を表す. これは, 重力波による位相変化の式とほとんど同じ形をしている. 異なるのは δn が時間依存性だけでなく空間依存性をもっていることである. 以下では, 光の伝播方向に沿って空間変化を 1 次元に限り, 相関関数が

$$\langle\delta n(x_1,t_1)\delta n(x_2,t_2)\rangle = R(|x_1-x_2|,|t_1-t_2|) = D_n\delta(x_1-x_2)g(|t_1-t_2|) \tag{6-162}$$

で与えられ, そのフーリエ変換が

$$S(k,\omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int\int R(x,t)\exp[-\mathrm{i}(kx+\omega t)]\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \frac{D_n}{2\pi}G(\omega) \tag{6-163}$$

で与えられると仮定する[12]. ここで, G は

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int g(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \tag{6-164}$$

---

11) FP の場合も一往復ごとに位相揺らぎを計算して無限級数を計算すればよい.
12) この $S(k,\omega)$ は単位角周波数あたりの両側スペクトルである.

で定義される．また，g は $g(0)=1$ を満たす関数である．
　この中を光が ℓ だけ伝播した時の位相変化は

$$\delta\phi(t) = -\Omega \int_{t-\ell/c}^{t} \delta n[x_0(t'), t'] \mathrm{d}t' \tag{6-165}$$

$$x_0(t') = c(t-t') \tag{6-166}$$

で与えられ，この中を光が往復した時の位相変化は

$$\delta\phi(t) = -\Omega \int_{t-2\ell/c}^{t} \delta n[x_0(t'), t'] \mathrm{d}t' \tag{6-167}$$

$$x_0(t') = \begin{cases} c(t'-t)+2\ell & (t-\frac{2\ell}{c} < t' < t-\frac{\ell}{c}) \\ c(t-t') & (t-\frac{\ell}{c} < t' < t) \end{cases} \tag{6-168}$$

で与えられる．位置の相関が δ 関数の場合を考えているので片道の光路の場合は

$$\langle \delta\phi(\omega)^2 \rangle = D_n \frac{\Omega^2 \ell}{c^2} G(\omega) \tag{6-169}$$

で，往復の光路の場合は

$$\langle \delta\phi(\omega)^2 \rangle = D_n \frac{2\Omega^2 \ell}{c^2} \left[1 + \frac{\sin(2\omega\ell/c)}{(2\omega\ell/c)} \right] G(\omega) \tag{6-170}$$

となる．実際の相関関数はもっと複雑になる可能性が高いがこれ以上の議論は困難である．
　次に，問題は真空容器内の圧力から屈折率揺らぎの相関関数を計算することになるが，やはり複雑でかなり大雑把な計算しかできない．ローレンツ-ローレンツの公式 [Born and Wolf 1980] によれば屈折率と気体中の粒子密度 ρ_{N} は

$$\frac{4\pi}{3} \rho_{\mathrm{N}} \alpha = \frac{n^2-1}{n^2+2} \tag{6-171}$$

で関係づけられる[13]．ここで α は平均分極率である．そして，真空度が十分高い場合には

$$n-1 = 2\pi\alpha\rho_{\mathrm{N}} \tag{6-172}$$

$$\delta n = 2\pi\alpha\delta\rho_{\mathrm{N}} \tag{6-173}$$

となる．
　また，理想気体ではある部分の微小体積中 (v) の粒子の個数 (N_v) はポアソン分布をするので [Giazotto 1989]，

$$\langle \delta {N_v}^2 \rangle = \langle N_v \rangle \quad (\delta N_v = N_v - \langle N_v \rangle) \tag{6-174}$$

を満たし，相関関数を考えれば

$$\langle \delta N_v(t) \delta N_v(t') \rangle = \langle N_v \rangle g(t-t') \tag{6-175}$$

13）この式は cgs 単位系で書かれている．

表 6-2　代表的な残留ガスのパラメータと必要とされる到達真空度.

Molecule	$n_0 - 1\ (10^{-4})$	u_0 (km/s)	$p\ (10^{-6}\mathrm{Pa})$
H_2O	2.52	0.526	0.52
N_2	2.97	0.422	0.30
H_2	1.38	1.58	5.2

と書ける. ここで g は $g(0) = 1$ の偶関数である. ここで, 微小な体積として通る光の波面に平行でビームの径 (半径 w, 厚さ Δx) の薄い円板を考える. そうすると式 (6-165) の δn としてこの円板内の平均の屈折率を考えれば

$$\delta n(x,t) = (\bar{n}-1)\frac{\delta N_v(x,t)}{\langle N_v\rangle} \quad \left(\langle N_v\rangle = \pi w^2 \Delta x \langle \rho_{\mathrm{N}}\rangle\right) \tag{6-176}$$

となり, 相関関数は

$$\langle \delta n(x,t)\delta n(x',t')\rangle = (\bar{n}-1)^2 \frac{\langle \delta N_v(x,t)\delta N_v(x',t')\rangle}{{N_v}^2} \tag{6-177}$$

で与えられるが, 円板が十分に薄くて粒子密度の揺らぎがまったくランダムならば波面に垂直方向 (X 軸方向) の相関は無くなると考えられるので

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\langle \delta N_v(x,t)\delta N_v(x',t')\rangle}{\Delta x\langle N_v\rangle} = \delta(x-x')g(t-t') \tag{6-178}$$

としてよい. $g(t)$ のフーリエ変換は $G(\omega)$ だからだから, 式 (6-162) と比較すると

$$D_n = \frac{(\bar{n}-1)^2}{\pi w^2 \langle \rho_{\mathrm{N}}\rangle} \tag{6-179}$$

が得られる. いま, $\langle \rho_{\mathrm{N}}\rangle = p/k_{\mathrm{B}}T$ で式 (6-172) を使うと標準状態 (p_0=1atm, $T_0 = 273.15$K) での屈折率 n_0 を用いて $\bar{n}-1 = (n_0-1)(p/p_0)(T_0/T)$ と表されるから,

$$S(k,\omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)\frac{(n_0-1)^2}{(A_0/V_0)\pi w^2}\left(\frac{p}{p_0}\right)\left(\frac{T_0}{T}\right)G(\omega) \tag{6-180}$$

となる. ここで V_0, A_0 は標準状態での気体 1 モルの体積 ($2.24\times 10^{-2}\mathrm{m}^3$) とアボガドロ数 ($6.02\times 10^{23}$) で, $V_0/A_0 = k_{\mathrm{B}}T_0/p_0$ を満たす.

もし, ビーム間の重なりのないところで相関が無視できるならば, 通常の DL では式 (6-169) の ℓ を全光路長と考えればよく, 重力波に対する干渉計の伝達関数を考えると

$$\langle h(\omega)^2\rangle_{\mathrm{DL}} = \frac{2}{N\ell}\frac{(n_0-1)^2}{(A_0/V_0)\pi w^2}\left(\frac{p}{p_0}\right)\left(\frac{T_0}{T}\right)\left(\frac{N\omega\ell/2c}{\sin(N\omega\ell/2c)}\right)^2 G(\omega) \tag{6-181}$$

で検出限界が決まる[14]. また, FP の場合は詳しい計算によると光が一往復する間の重力波と屈折率の揺らぎの寄与の比が常に同じであることから一往復での SN 比を考えればよいことがわ

14) 両方の腕の寄与を考えて揺らぎの大きさを倍にした.

表 6-3　典型的な大型干渉計のパラメータ．これらを使って，干渉計の感度がどの程度になるかを推定する．

項目	数値	備考
干渉計		
基線長	3km	
フィネス	100	
光源		
有効レーザーパワー	1kW	レーザーパワー × リサイクリングゲイン
振り子		
質量	20kg	直径 30cm 厚さ 13cm 合成石英
共振周波数	1Hz	
Q	10^6	
鏡		
有効質量	2kg	高次モードの補正を入れる
共振周波数	20kHz	
Q	10^6	
外乱振動		
防振系	-160dB	at 100Hz 1Hz× 4 段
振動スペクトル	$10^{-7}/f^2$	$\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$

かり

$$\langle h(\omega)^2\rangle_{\mathrm{FP}} = \frac{1}{\ell}\frac{(n_0-1)^2}{(A_0/V_0)\pi w^2}\left(\frac{p}{p_0}\right)\left(\frac{T_0}{T}\right) \times\left(\frac{\omega\ell/c}{\sin(\omega\ell/c)}\right)^2\left[1+\frac{\sin(2\omega\ell/c)}{(2\omega\ell/c)}\right]G(\omega) \tag{6-182}$$

で検出限界が与えられる．これらを較べると，FP は同じところを往復しているために DL よりも影響が大きいことがわかる[15]．さらに問題なのは G の関数形であるが

$$g(\tau) = \frac{1}{1+(\tau/\tau_{\mathrm{R}})^2} \tag{6-183}$$

というローレンツ型の相関関数をもつことが示されている [Whitcomb 1984]．これを利用すると

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int g(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = \frac{\tau_{\mathrm{R}}}{2}\mathrm{e}^{-|\omega|\tau_{\mathrm{R}}} \tag{6-184}$$

となる．さらに低周波の極限を用いると FP に対しては

$$\langle h(\omega)^2\rangle_{\mathrm{FP}} = \frac{2}{\ell}\frac{(n_0-1)^2}{(A_0/V_0)\pi w^2}\left(\frac{p}{p_0}\right)\left(\frac{T_0}{T}\right)\frac{\tau_{\mathrm{R}}}{2} \tag{6-185}$$

というおよその推定ができる．ここで，τ_{R} は w をガウシアンビームのビームサイズとし，粒子 (質量 m) の平均的速度を u とすると，

$$\tau_{\mathrm{R}} = \frac{w}{u} = \frac{w}{u_0}\sqrt{\frac{T_0}{T}} \quad \left(u=\sqrt{\frac{2k_{\mathrm{B}}T}{m}}\right) \tag{6-186}$$

で与えられる．また，共焦点型のガウスモードを考え，ビームウエストの大きさで全体を代表すると

$$w = \sqrt{\frac{\lambda\ell}{2\pi}} \tag{6-187}$$

15）光路が非常に接近した場合には同じところを往復した場合に近いので，それによる相関が新たに発生する可能性もある．

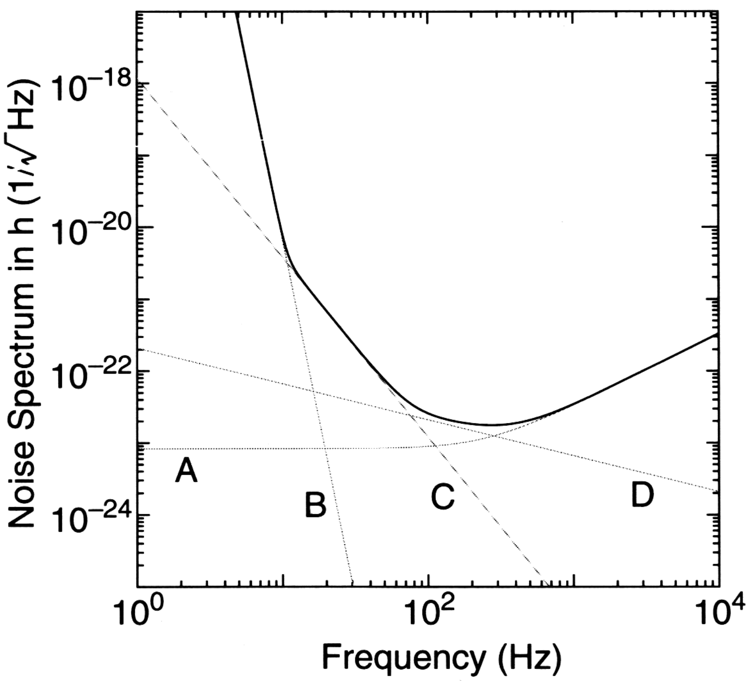


図 6-8　干渉計の雑音スペクトルの例. 散射雑音 (A), 外乱振動雑音 (B), 振り子の熱雑音 (C), 鏡の熱雑音 (D) のスペクトルを考慮し, それぞれの 2 乗和の平方根を用いて, 干渉計全体の雑音の推定を行った.

なので,

$$\langle h(\omega)^2 \rangle_{\mathrm{FP}} = \frac{1}{4\pi} \frac{4\sqrt{2\pi}}{\ell} \frac{(n_0-1)^2}{(A_0/V_0)u_0\sqrt{\ell\lambda}} \left(\frac{p}{p_0}\right) \left(\frac{T_0}{T}\right)^{3/2} \tag{6-188}$$

と表すこともできる.

実際の真空度に対する要求についてはより厳しい FP について行う. いま, $\ell = 3\mathrm{km}$, $\lambda = 1\mu\mathrm{m}$, $T = 300\mathrm{K}$ とし, $h \sim 10^{-24}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$ を満たすために必要な分圧をそのほかのパラメータと一緒に表 6-6-5-2 にまとめる[16]. 結局, 内部の圧力は 10^{-6}Pa ($\sim 10^{-8}$Torr) 以下が必要となる. これを実現するための装置については真空装置の章を参照されたい.

6-6-6　具 体 例

ここでは, 典型的な干渉計で予測される雑音のスペクトルを考えてみる. 表 6-3 にあげたパラメータには, 現時点で達成されてないが, これらの開発で十分実現できると思われる値を採用した.

これらの値を用いて干渉計の雑音のスペクトルを計算し, グラフにしたものが図 6-8 である. 図では, 散射雑音 (A), 外乱振動雑音 (B), 振り子の熱雑音 (C), 鏡の熱雑音 (D) のスペクトルを考慮し, それぞれの 2 乗和の平方根を用いて, 干渉計全体の雑音の推定を行った. これを見ると

16) この h は単位周波数あたりの片側スペクトルなので式 (6-188) に 4π を掛けたもので計算する.

一番感度が良くなるのは 100Hz 付近であることがわかる．もし，100Hz でバンド幅を 100Hz 取れば，$h \sim 3 \times 10^{-22}$ 程度の重力波を捕らえることができるだろうと思われる．これは，ちょうど，100Mpc くらいの距離で起きる連星中性子星の合体の時に出る重力波のレベルであり，地上での観測の可能性は十分高くなるだろう．

第8章
他の重力理論と重力波

8-1 なぜ一般相対論以外の重力理論を考えるのか？

1916年, アインシュタインは特殊相対論を重力を含むように一般化し, 一般相対論を完成した. そのときの指導原理は,「(1) 一般共変性, (2) エネルギー運動量の保存則, (3) 弱い重力場の極限でニュートン理論に一致すべき」の3つであったという. 実際, アインシュタインが完成した理論はその条件を満足する最も簡単なものではあったが, それが唯一の理論ではないことは, その後, 次々と現れた新しい重力理論の存在からもわかる. しかし, すべてではないにしてもその多くは観測・実験と矛盾することが判明し, 消えていくこととなった [Will 1972, 1993]. アインシュタインの一般相対性理論は82年たった今も実験や観測と矛盾しない "正しい" 相対論的重力理論なのである.

では, なぜ一般相対論以外の理論を考えるのであろうか？その動機は2つ考えられる. 1つは, 自然科学者はいつもあらゆる可能性を頭に入れておく必要があるということである. あらゆる状況に対し正しい理論などないであろう. ある状況下, ある条件下で, "正しい" 理論はあるであろうが, その理論にも限界があるということである. そのためにも, 現在の観測・実験と矛盾しない理論には, どれも目を閉ざすべきではない. 実際, 一般相対性理論は非常に美しいし, これまで矛盾は現れていないが, その一方で, ある状況下で特異点が必然的に発生することも証明されている [Penrose 1965, Hawking 1967, Hawking and Penrose 1969, Hawking and Ellis 1973]. 特異点が現れるような状況ではもはや一般相対論は正しくないのは明らかである. それは, 一般相対論を量子化した量子重力理論という形で解決されるかもしれないし, まったく違った重力理論で無矛盾になるかもしれない. そのためにも, いろいろな重力理論を考え, 可能性を観測・実験により検証することは重要である. 結果的に一般相対論が考えているスケールの重力現象に対する正しい理論であったとしても, その他の重力理論を観測的に排除したり理論のパラメータを非常に不自然な値に制限することで, 一般相対論の "正しさ" をよりいっそう観測的・実験的に検証することになる [Will 1993].

第2の理由は, もう少し積極的な考え方である. 重力は基本的な相互作用と考えられるが, 現在の素粒子の力の統一理論の考え方を自然に拡張すると, 重力も何らかの形で他の力と統一されるべきであろう. 例えば, 超重力理論やカルツァ-クライン理論, 超ひも理論などの試みがある. これらの理論からは, 現象論的にアインシュタイン理論でないものも自然に現れる. 実際, 究極

理論として注目されている超ひも理論の場の理論の極限では，ある種のブランス-ディッケ重力理論 ($\omega = -1$) が導き出される [Callan et al 1985, Maeda 1988]．また，曲率の 2 乗項やより高次の項が補正として現れる [Boulware and Deser 1985]．さらに，アインシュタイン理論が正しくなくなるであろうミクロなスケールでは，量子効果が重要となり，アインシュタイン理論はその意味でも変更を受けるであろう．超ひも理論などのように，場の理論とはまったく異なったアプローチでないとそのような状況は記述できないのかもしれないし，またある種の補正項を加えることで現象論的には十分であるかもしれない．後者である場合には，一般相対論の量子的補正は，新しい重力理論を考える際にヒントを与える．例えば，曲がった空間におけるスカラー場 ϕ の量子的補正から non-minimal coupling 項

$$-\xi\phi^2 R \tag{8-1}$$

などは影響を受ける [Birrell and Davies 1980, Nelson and Panangaden 1982, Ford and Toms 1982]．その極端な場合が，induced gravity 理論で，重力自身の作用もいわゆるアインシュタイン・ヒルベルト作用

$$S = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\frac{1}{16\pi G}R \tag{8-2}$$

ではなく[1)]，

$$S = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left[\frac{\epsilon}{2}\phi^2 R - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{\lambda}{8}(\phi^2 - \eta^2)^2\right] \tag{8-3}$$

(ϵ, λ, η：定数) のように，スカラー場 ϕ の量子効果で作り出されると考える [Zee 1979]．また曲率の 2 乗項やより高次の項も量子補正として現れる [Brown and Collins 1980, Adler 1982, Parker and Toms 1985]．このように，アインシュタイン理論をはじめに述べた原理を満たすという条件で拡張しようというだけでなく，もう少し根拠のある理由からも，その他の重力理論は考えられている．

ここで，少し古いが，Will による面白い “機械” を引用しよう (図 8-1, Will [1972])．いろいろなテストを経て現在まで生き残っている理論はそんなに多くない．その典型的な理論が，一般相対論とスカラー・テンソル理論といえる．そこで，以下では話をスカラー・テンソル理論，特に，ブランス-ディッケ理論に限ろう．1993 年現在におけるいろいろな重力理論の観測・実験的検証に関する詳しいことは，同じ Will のよい教科書があるので，それを参照してもらうことにする [Will 1993]．

8-2　ブランス-ディッケ理論／スカラー・テンソル理論

アインシュタイン理論以外の重力理論を考えるとき，まず引き合いに出されるのがブランス-ディッケ理論である [Brans and Dicke 1961, Jordan 1959]．アインシュタイン理論が持っていない重力定数の変化など特徴的な性質を基本的に備えており，かつ最も簡単な理論だからである．

---

1) この章では，ニュートンの万有引力定数 G が変化する理論も考えるので，G を 1 におかずにそのまま記述する．

その作用は

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{\Phi}{16\pi}R - \frac{\omega}{\Phi}(\nabla\Phi)^2 + L_{\rm matter}\right] \tag{8-4}$$

で記述される．ω はブランス-ディッケパラメータと呼ばれるもので，重力場とブランス-ディッケスカラー場 Φ の結合の度合いを表す．またブランス-ディッケ理論は $\omega \to \infty$ の極限でアインシュタイン理論に一致する．他のスカラー・テンソル理論は，ω がスカラー場 Φ に依存するが，定性的にはブランス-ディッケ理論と似ている．

ところで，スカラー・テンソル理論を含め前節で述べた重力理論は一般相対論とは異なる重力理論ではあるが，その多くの理論は，重力の部分だけを考えると次のような共形変換を通してアインシュタイン理論と完全に等価であることがわかる．つまり，$F(\Phi, R)$, $K(\Phi)$ を Φ, R の任意関数とし，作用が

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}[L_{\rm gravity} + L_{\rm matter}] \tag{8-5}$$

で記述される理論を考える．ここで $L_{\rm gravity}$ は

$$L_{\rm gravity} = F(\Phi, R) - K(\Phi)(\nabla\Phi)^2 \tag{8-6}$$

である．いま重力部分 $L_{\rm gravity}$ のみを考えると，

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu} \tag{8-7}$$

という共形変換により，アインシュタイン-ヒルベルト作用に 1 つまたは 2 つのスカラー場を考えた次の 2 つの場合のどちらかと等価になる [Higgs 1959, Wagoner 1970, Magnano et al. 1987, Jakubiec and Kijowski 1988, Maeda 1989]．ここで，

$$\Omega^2 = 2\kappa^2\left|\frac{\partial F}{\partial R}\right| \tag{8-8}$$

($\kappa^2 \equiv 8\pi G$) である．

(1) $F(\Phi, R) = f(\Phi)R - V(\Phi)$ ($f(\Phi)$, $V(\Phi)$ は任意関数)

上の共形変換により等価な重力作用は次のようになる．

$$S = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-\hat{g}}\left[\frac{1}{16\pi G}R(\hat{g}) - \frac{1}{2}(\hat{\nabla}\phi)^2 - U(\phi)\right] \tag{8-9}$$

ここで，

$$\kappa\phi = \int \mathrm{d}\Phi\left[\frac{2K(\Phi)f(\Phi) + 3[\mathrm{d}f(\Phi)/\mathrm{d}\Phi]^2}{2f^2(\Phi)}\right]^{1/2} \tag{8-10}$$

$$U(\phi) = ({\rm sign})(2\kappa^2|f(\Phi)|)^{-2}V(\Phi), (({\rm sign}) \equiv f(\Phi)/|f(\Phi)|) \tag{8-11}$$

である．

(2) $F(\Phi, R)$ が R に関し非線形項を持つ場合

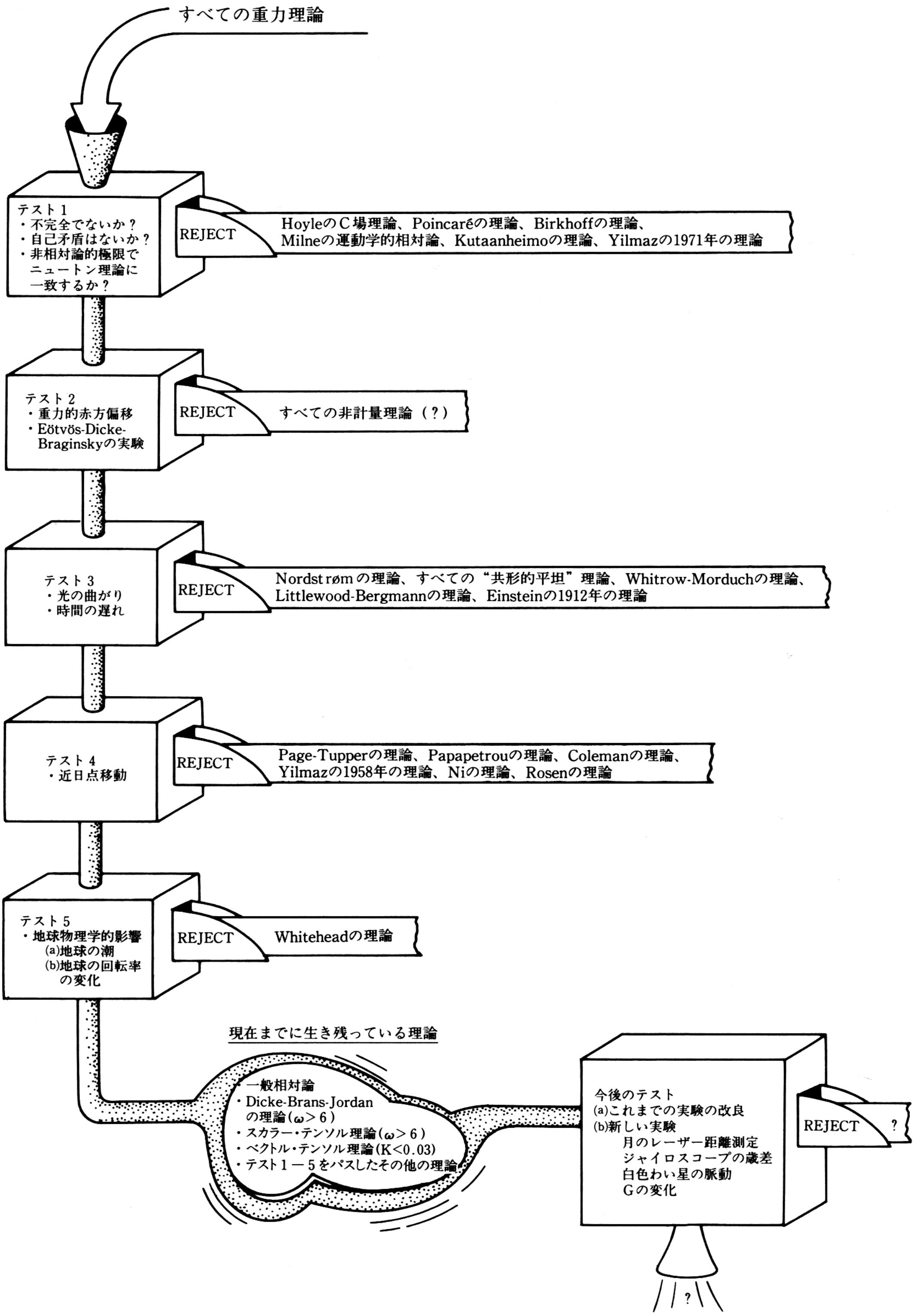


図 8-1　C. M. Will, Physics Today [1972] より

等価な作用は

$$S=\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-\hat{g}}\left[\frac{1}{16\pi G}R(\hat{g})-\frac{1}{2}(\hat{\nabla}\psi)^2-\frac{(\mathrm{sign})}{2}e^{-\sqrt{2/3}\kappa\psi}(\hat{\nabla}\phi)^2-U(\psi,\phi)\right] \quad (8\text{-}12)$$

となる．ここで，

$$\kappa\psi=\sqrt{6}\ln\Omega \quad (8\text{-}13)$$

$$\phi=\int \mathrm{d}\Phi\sqrt{2K(\Phi)} \quad (8\text{-}14)$$

$$U(\psi,\phi)=(\mathrm{sign})\left[2\kappa^2\left|\frac{\partial F}{\partial R}\right|\right]^{-2}\left[R\frac{\partial F}{\partial R}-F\right],((\mathrm{sign})\equiv(\partial F/\partial R)/|\partial F/\partial R|) \quad (8\text{-}15)$$

である．この場合には，重力方程式が高階微分を含み，重力場の自由度がアインシュタイン理論よりも増えるが，それが新しいスカラー場 ψ として表される．

一方，リーマンテンソルの高次の項が含まれる場合には，スカラー場を1つ新しく導入するだけでアインシュタイン重力と等価にすることはできない [Magnano et al. 1987, Jakubiec and Kijowski 1988].

重力の部分は共形変換で一般相対論と等価な形に変形可能ではあるが，物質部分がこの変換でスカラー場 ϕ と結合するため，これらの重力理論は，もちろん一般相対論とは異なる．また，その結合の様子も個々の理論によって異なり，観測等と比較するには理論を特定する必要がある[2)]．

ブランス-ディッケ理論等のいわゆるスカラー・テンソル理論の大きな特徴は，重力定数 G の変化である．上の2つの作用の比較からわかるように，$G\sim 1/\Phi$ で，G はブランス-ディッケスカラー場 Φ といった力学変数で記述され，時間的にも空間的にも変化しうるのである．このことは，いろいろな重力現象の観測・実験等からこの理論が正しいかどうか，制限を受けるのかどうかを確かめる手段を持つということである．ブランス-ディッケ理論は，理論に含まれるパラメータ $\omega\to\infty$ の極限で一般相対論に一致するから，ω の許容範囲が観測的に決まることになる．太陽近傍の実験など弱い重力場中における詳しい解析は Will の本 [Will 1993] にまとめられているので，ここではその結果を述べるだけにしておく．一番強い制限は，太陽の近くを通る光の通過時間の遅れ (Shapiro time delay) [Shapiro 1964] の解析で (2-6 節)，Viking の火星着陸船を使った実験から決まり，$\omega>500$ という制限が与えられている [Reasenberg et al. 1979]. 太陽近傍の弱い重力場におけるいろいろなテスト以外にも，相対論的重力理論に特有の波動現象，つまりこの本のテーマである重力波を使うとまた異なった制限が考えられる．以下では，その問題をスカラー・テンソル理論の代表格のブランス-ディッケ理論についてのみ言及しよう．

8-3 ブランス-ディッケ理論と重力波

ブランス-ディッケ理論等のいわゆるスカラー・テンソル理論はもちろんアインシュタイン理論同様，重力波の自由度を持っているが，その大きな違いは，スカラー波の自由度の存在である．重力波はスピン2の粒子に対応し四重極 ($l=2$) 以上の波しか現れないのに対し，スカラー波は

2) 実際の太陽近傍のような弱い重力場中における一般相対論の検証実験などでは，ポスト・ニュートン展開を使った PPN (parametrized post-Newtonian) 理論 [Will 1971a, 1971b] により，いろいろな重力理論をいくつかのパラメータで表現し，理論を特定しないで観測・実験と比較できる (2-6 節).

球対称の様な単極子の時間変化でも発生する．このことは，重力波を伴う相対論的現象において大きな影響をもたらすと考えられる．その結果，もしそのような理論が正しいとすると，重力波の観測等によって将来検証される可能性がある [Wagoner 1970]．また，逆にその理論が排除されたり，大きな制限を受けたりすることも考えられる．ここではそのいくつかを取り上げよう．

8-3-1 連星パルサー

Hulse と Taylor によって発見された連星パルサー PSR1913+16 は，そのノーベル物理学賞受賞の理由となったことから明らかなように，強い重力場における相対論的重力理論の "天然の実験室" である (3-5 節)．彼らの観測で重力波は間接的にはすでに発見されているといってよく，実際，アインシュタイン理論の予言する軌道変化とぴたり一致した．もし，理論が一般相対論でなく，たとえばブランス-ディッケ理論であるとすれば，その軌道変化もスカラー重力波の存在によって影響を受ける．一般相対論から予想される重力波放出による軌道運動のエネルギー変化率は，四重極公式を使うと，

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\left\langle \frac{8\mu^2 M^2}{15r^4}(12v^2 - 11\dot{r}^2) \right\rangle \tag{8-16}$$

となる [Peters and Mathews 1963]．ここで，2 つの天体の質量を m_1, m_2 とすると，μ, M, r および v はそれぞれ換算質量 $\mu = m_1 m_2/M$, 全質量 $M = m_1 + m_2$, 2 つの天体間の距離，および相対速度の大きさで，$\dot{r} = dr/dt$ である．また，$<>$ は軌道平均である．しかし，ブランス-ディッケ理論では 2 つの影響が考えられる．1 つは上の四重極公式の補正で，もう 1 つは新しい重力波の自由度 (スカラー重力波) によるものである．はじめの補正に関しては，上の公式の係数を少し変更するだけですむ．第 2 の効果は，次のように双極子的な放射として現れる．

いま，ブランス-ディッケ場 Φ は物質場を源とする波動方程式，

$$\Box\Phi = \frac{8\pi}{2\omega + 3}\left(T - 2\Phi\frac{\partial T}{\partial\Phi}\right) \tag{8-17}$$

を満たす．ところが，ブランス-ディッケ場は重力場と結合しており，その相互作用を通して天体の質量に影響する．つまり，慣性質量 m がブランス-ディッケ場 Φ に $m = m(\Phi)$ のように依存する [Will 1971a, Eardley 1975]．そのため天体の運動は測地線からずれ (Nordtvert 効果) [Nordtvert 1968]，弱い等価原理[3] が成立しなくなる．重力定数に対するその天体の慣性質量の "感度" s を

$$s \equiv \frac{\mathrm{d}\ln m(\Phi)}{\mathrm{d}\ln\Phi} = -\frac{\mathrm{d}\ln m(\Phi)}{\mathrm{d}\ln G} \tag{8-18}$$

で定義すれば[4]，その測地線からのずれの程度が評価できる．s はだいたい単位質量当たりの自己重力エネルギーになり，普通の星で 10^{-6}, 白色矮星で 10^{-3} となりあまり重要ではないが，中性子星のような相対論的天体では $0.1 \sim 0.4$ ぐらいになる．またブラックホールの場合には $s = 0.5$ になることが知られている [Eardley 1975]．

3）ここでは自己重力系の運動も含めた意味で使っている．Will はその場合を gravitational weak equivalence principle と称し，等価原理をより厳密に分類している [Will 1993]．

4）はじめにこの量を導入した Eardley の定義 [Eardley 1975] ではここの定義 [Will and Zaglauer 1989, Will 1994] の 2 倍である．

また, 相対論的天体の運動がブランス-ディッケ場を放出する場合, その源となるのはスカラー質量 $M_s \equiv (1-s)M/(2\omega+4)$ であることが知られており [Hawking 1972, Lee 1974], その結果, 連星パルサーのような s が異なる 2 つの天体の運動においては, 双極子的なスカラー重力波が発生することになる. それによる軌道運動のエネルギー変化率は,

$$\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{dipole}} = -\frac{1}{3}\kappa_D \left\langle \frac{\mu^2 M^2 S^2}{r^4} \right\rangle \tag{8-19}$$

と評価される [Eardley 1975, Will 1977]. ここで, $S = s_1 - s_2$ は, 2 つの中性子星の "感度" s_1, s_2 の差である.

以上の 2 つの効果を考えると, ブランス-ディッケ理論では, 予想される重力波放出による軌道運動のエネルギー変化率は

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\left\langle \frac{\mu^2 M^2}{r^4} \left[\frac{8}{15}(\kappa_1 v^2 - \kappa_2 \dot{r}^2) + \frac{1}{3}\kappa_D S^2 \right] \right\rangle \tag{8-20}$$

と表される [Will 1977]. 係数 κ_1, κ_2 および κ_D は, それぞれ

$$\kappa_1 = 12 - \frac{5}{2+\omega} \quad \kappa_2 = 11 - \frac{45}{8+4\omega} \quad \kappa_D = \frac{2}{2+\omega} \tag{8-21}$$

である.

これを, 現在観測されている連星パルサー PSR 1913+16 にあてはめると何らかの制限が得られるだろうか? 双極子放射の部分から来る軌道周期の変化率を評価すると,

$$\left(\frac{\dot{P}_{\mathrm{b}}}{P_{\mathrm{b}}}\right)_{\mathrm{dipole}} = -(1 \times 10^{-9})(\frac{500}{\omega})(\frac{S}{0.1})^2(\frac{\mu}{M_\odot})\mathrm{yr}^{-1} \tag{8-22}$$

なる [Eardley 1975, Will 1977]. ここでは ω に関する現在の制限値を使い, $1/\omega \ll 1$ を仮定した. 軌道周期の変化率 $\dot{P}_{\mathrm{b}}/P_{\mathrm{b}}$ の観測値は $(2.74 \pm 0.01) \times 10^{-9}\mathrm{yr}^{-1}$ であるから, S がそれほど小さくなければ, 十分観測可能になるか, ω のより強い制限を与えるかのどちらかである. ところが, PSR 1913+16 を構成する 2 つの中性子星の質量はほぼ同じで (パルサーの質量が $m_1 = 1.4410\ M_\odot$, 相手の星の質量が $m_2 = 1.387\ M_\odot$), その "感度" の差 S がきわめて小さいと考えられ, ω に対する大幅な制限は現在得られない.

8-3-2　星の重力崩壊や連星中性子星の合体

現在進行中の LIGO などの重力波検出器による重力波の直接観測では, 連星パルサーの最後の合体がその重力波源として有望視されている. また, 超新星爆発や, それに伴う重力崩壊, 中性子星やブラックホールの形成などの現象に伴う重力波も観測される可能性がある. そのような非常に相対論的な動的現象における重力波放出は, もちろん重力理論が変われば大きく影響を受けるに違いない. 一般相対論とそれ以外の理論の差が大きく現れるところである. その結果, もし, アインシュタイン理論が正しいとすれば, その他の重力理論に対する制限は非常に強くなり, 一般相対論に対する信頼性をよりいっそう増すことになる. そのためにも, どの程度の制限が課されるかを調べておくことは重要である.

連星パルサーの合体に伴う重力波に関しては, 四重極公式が成り立つところまでは前節の議論で基本的に十分で, やはり構成天体の質量 "感度" の差 S があまり小さくならなければ現在より

きつい制限が付けられる [Will 1994]. たとえば, 1.3 $\sim$ 1.5 $M_\odot$ の中性子星と 3 $M_\odot$ のブラックホールの系を考えると, 現在の 2 倍の値まで制限可能で, 0.7 $M_\odot$ の中性子星と 3 $M_\odot$ のブラックホールの系では $\omega \sim$ 2000 まで議論できる. しかし, 2 つのブラックホールの系 ($S=0$) や 1.4 $M_\odot$ ぐらいの中性子星の系 ($S \leq 0.05$) では現在の太陽近傍の実験から得られる制限値より小さい値しかでない.

一方, ブランス-ディッケ理論などのスカラー・テンソル重力理論では, スカラー重力波が放出されるから, 球対称な重力崩壊などの相対論的動的現象でも, 重力波の観測に影響を与える. 超新星爆発やそれに続く重力崩壊などに伴う重力波放出量の評価では, その系が球対称や軸対称からどの程度ずれているかが重要で, またそれが大きな不確定要素となる. しかし, スカラー重力波の場合は球対称な場合にも放出され, 重力波源としても十分期待されるであろう. ブランス-ディッケ理論を重力波で検証するためにはその放出量の評価が重要なポイントになる. そこで, 柴田達は星の重力崩壊に伴うスカラー重力波の観測可能性を議論するために, 球対称な星のダイナミクスを数値計算でシミュレートし, スカラー重力波の放出率を求めた [Shibata et al 1994]. その結果, 第 2 世代の LIGO では, もし ω が 2–3000 より小さければ乙女座銀河団からの超新星爆発に伴うスカラー重力波が観測可能であることを示した. 逆に, 超新星爆発においてスカラー重力波放出のような現象が見つからなかった場合には, その値はそのまま ω の下限値になる. もし超新星爆発がたまたま我々の銀河で起こったとしたら, ω は $\sim 10^6$ までその下限が引き上げられる.

8-3-3 Extended Inflation と重力波

LIGO プロジェクトが発表されてから, 意外なところに重力波源の可能性が示された. インフレーションに伴う重力波である. 通常のインフレーション宇宙論では, その宇宙の急激な膨張のため重力波はインフレーション期間中にきわめて小さくなり, その量は現在計画されているプロジェクトではとても観測可能な範囲にない.

インフレーション宇宙モデルは素粒子の力を統一する大統一理論を基礎に登場した. 一番はじめに提案された old inflation モデルは, インフレーションのアイデアがそこから来ていることからわかるように, 考え方も自然で, その基礎となる素粒子論的背景もきっちりとしている. しかしながら, そのモデルは, 背景の宇宙の急激な膨張のため, 宇宙の真空の相転移において発生する泡の衝突が十分に起こらず, 相転移が終了しないという問題点がすぐに指摘された. その問題を解決すべく, new inflation, chaotic inflation と新しいインフレーションモデルが次々と提案されることになる. しかし次々現れる問題を解決していくうちに, 素粒子論を基盤にするという考えは薄れ, インフレーションのためだけの理論が考えられるようになっていく. もちろん, その後も素粒子の自然なモデルに基づくインフレーション宇宙論を模索中ではあるが, 完全に納得のいくインフレーションモデルは現時点においてまだ無い. そのような状況で, 重力をアインシュタイン理論からブランス-ディッケ理論に変更するとオリジナルなインフレーションモデル (old inflation) の困難が解決されるということが指摘された [La and Steinhardt 1989]. これは重力と結合しているブランス-ディッケ場によって, 宇宙の膨張が de Sitter 解のような指数関数的な膨張から時間のべき関数的なゆっくりとした膨張に変わるため, 十分な泡の衝突が起こり, 相転移が終了するというものである. この新しいモデルは extended inflation と呼ばれる. しかし, そ

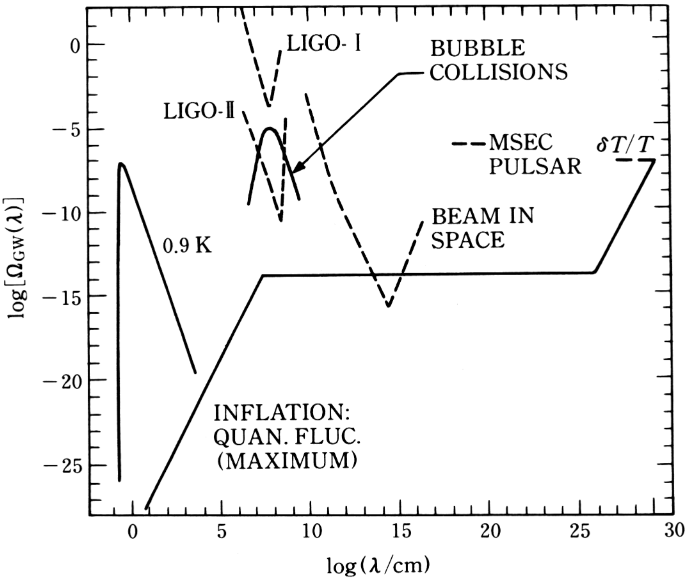


図 8-2　波長 λ の重力波の臨界密度に対する割合 $\Omega_{\rm GW}(\lambda)$. 図には, 標準宇宙論で予想される 0.9 K の背景重力波, 再加熱温度を $T_{\rm RH} \sim 3 \times 10^{10}$ GeV としたときの extended inflation において泡の衝突によって発生する重力波, そしてインフレーションの質量スケールを $M \sim 10^{16}$ GeV, 再加熱温度を $T_{\rm RH} \sim 3 \times 10^{10}$ GeV としたときの量子的ゆらぎから生じる最大スペクトルが示されている.

のモデルも, $\omega < 25$ でなければ, 泡の衝突によって形成される密度揺らぎが宇宙の一様・等方性を大きく壊し, 観測と矛盾してしまうことがすぐに明らかとなった. そこで, ブランス-ディッケ理論を拡張したスカラー・テンソル理論を基盤にしたインフレーションモデル (hyper-extended inflation) が提案されるようになる [Steinhardt and Accetta 1990, Barrow and Maeda 1990]. これは, ω を定数ではなく, スカラー場の関数 $\omega(\Phi)$ とし, インフレーション期間中は $\omega(\Phi) \leq 25$ と考え, 現在は $\omega(\Phi) \geq 500$ になっていると考えるモデルである.

いずれにせよ, もしスカラー・テンソル重力理論を基盤にしたインフレーションモデルが正しく, 1 次相転移によって泡が形成されその衝突によって相転移が終了するというシナリオが正しいとすると, その泡の衝突の際に発生する重力波は近い将来観測可能になるというのである (図 8-2, [Turner and Wilczek 1990]). この評価は楽観的すぎると思うが, ちょうどうまく第 2 世代の LIGO 計画とその予想値が一致する. 重力波がインフレーション期間中に簡単に減衰しないのは, 背景宇宙の膨張則がべき関数的なゆっくりとしたものであるからである.

しかし, このモデルにも別の観点から問題点が現れることになる. 観測衛星 COBE などによる宇宙背景輻射のスペクトルをみると, 必ずしもインフレーションモデルが予言する Harrison-Zel'dovich スペクトルに一致するといえない. どちらかといえば少しずれている可能性がある. もしこのずれが現実であれば, インフレーションモデルはダメになるのであろうか？そうではなく, テンソルモード (重力波モード) が重要になるという指摘がある. この場合, テンソルモードはふつうのインフレーションで予言される値ではダメで, power-law inflation が期待される. 膨張は指数関数的ではなく, 時間のべき関数になるため, 密度揺らぎ (スカラーモード) と比較しうる程度にテンソルモードが重要になる. もちろん, アインシュタイン理論の範囲内で, power-law inflation を考えることはできるし, もしそうだとすると, 重力理論を変更することと何の関係も

ない話になるのであるが, 重力場とスカラー場が結合するスカラー・テンソル理論では, 前に述べた共形変換を通し, アインシュタイン系では指数関数ポテンシャルが自然に現れる [Berkin, Maeda and Yokoyama 1990, Berkin and Maeda 1991]. その結果, extended inflation に代表されるように, power-law inflation はそのような理論ではもっともらしいインフレーションモデルとなり, Harrison-Zel'dovich スペクトルからのずれが自然に期待できる. しかし, スペクトルがある程度観測的にわかっているということは, 逆に重力理論の制限を与えうる. つまり, あまりゆっくりとした power-law inflation ではテンソルモードが観測の制限範囲を超えて大きくなってしまうからである. 実際, IRAS/QDOT と POTENT から密度揺らぎを 20 h^{-1} Mpc で規格化し 1000 h^{-1} Mpc の COBE データを調べると, extended inflation を含むほとんどのモデルが排除されるという指摘もある [Liddle and Lyth 1992]. ここで h は, 100km/s/Mpc を単位にしたハッブルパラメータである.

付録

a) アインシュタイン方程式の (3+1) 次元形式での基礎方程式を導くこと

射影演算子 $P_{\mu\nu}$ を用いると任意のテンソルを n^μ に垂直な空間方向に射影することが出来た. 同じことをテンソル $T^{\alpha_1\cdots\alpha_k}{}_{\beta_1\cdots\beta_l}$ の $g_{\mu\nu}$ についての共変微分に対しても考えてみよう [Hawking and Ellis 1973]. すなわち

$$\widetilde{T}^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l\|\gamma} \equiv \widetilde{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_k}{}_{\beta_1\cdots\beta_l;\delta} P^{\mu_1}{}_{\alpha_1} \cdots P^{\mu_k}{}_{\alpha_k} P^{\beta_1}{}_{\nu_1} \cdots P^{\beta_l}{}_{\nu_l} P^{\delta}_{\gamma} \tag{a-1}$$

ここで, $\widetilde{T}$ は式 (1-68) で定義された n^μ に垂直な成分しかもたないテンソルである. 上式で $\|$ なる共変微分は右辺で定義されたものである. まず $P_{\mu\nu\|\rho}$ を考えると

$$\begin{aligned} P_{\mu\nu\|\rho} &= P_{\alpha\beta;\gamma} P^{\alpha}{}_{\mu} P^{\beta}{}_{\nu} P^{\gamma}{}_{\rho} \\ &= (n_{\alpha;\gamma}\, n_\beta + n_\alpha\, n_{\beta;\gamma})\, P^{\alpha}{}_{\mu} P^{\beta}{}_{\nu} P^{\gamma}{}_{\rho} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{a-2}$$

したがって, これは計量テンソルの共変微分がゼロになるという事実を考えると $\|$ が $P_{\mu\nu}$ に関する共変微分と考えられることを示している. 実際 $P_{ij} = \gamma_{ij}$ であるし $P^{ij} = \gamma^{ij}$ となっている. 又, 任意のベクトル $\widetilde{Y}_\mu$ の共変微分の空間成分は

$$\begin{aligned} \widetilde{Y}_{i\|j} &= \widetilde{Y}_{\mu;\nu} P^{\mu}{}_{i} P^{\nu}{}_{j} \\ &= \frac{\partial \widetilde{Y}_i}{\partial x^j} - {}^{(4)}\Gamma^{\mu}_{ij} \widetilde{Y}_\mu \\ &= \frac{\partial \widetilde{Y}_i}{\partial x^j} - (P^{\mu\rho} - n^\mu n^\rho)\,{}^{(4)}\Gamma_{\rho,\, ij} \widetilde{Y}_\mu \end{aligned}$$

ここで $n^\mu \widetilde{Y}_\mu = 0$ だから

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial \widetilde{Y}_i}{\partial x^j} - P^{\mu\rho}\ {}^{(4)}\Gamma_{\rho,\, ij} \widetilde{Y}_\mu \\ &= \frac{\partial \widetilde{Y}_i}{\partial x^j} - {}^{(3)}\Gamma^{l}_{ij} \widetilde{Y}_l \\ &= \widetilde{Y}_{i|j} \end{aligned} \tag{a-3}$$

となって γ_{ij} による共変微分と一致する.

さて, 今から 4 次元でのリーマンテンソルと 3 次元でのリーマンテンソルの関係式を求めよう. 3 次元でのリーマンテンソルは定義から

$$ {}^{(3)}R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}\widetilde{Y}^{\beta} = \widetilde{Y}^{\alpha}{}_{\|\delta\gamma} - \widetilde{Y}^{\alpha}{}_{\|\gamma\delta} \tag{a-4} $$

さて

$$ \begin{aligned} \widetilde{Y}^{\alpha}{}_{\|\delta\gamma} &= (\widetilde{Y}^{\mu}{}_{;\nu}P^{\nu}{}_{\epsilon}P^{\sigma}{}_{\mu})_{;\rho}P^{\rho}{}_{\gamma}P^{\epsilon}{}_{\delta}P^{\alpha}{}_{\sigma} \\ &= \widetilde{Y}^{\mu}{}_{;\nu\rho}P^{\nu}{}_{\delta}P^{\alpha}{}_{\mu}P^{\rho}{}_{\gamma} \\ &\quad + \widetilde{Y}^{\mu}{}_{;\nu}\ P^{\nu}{}_{\epsilon;\rho}P^{\epsilon}{}_{\delta}P^{\alpha}{}_{\mu}P^{\rho}{}_{\gamma} + \widetilde{Y}^{\mu}{}_{;\nu}\ P^{\sigma}{}_{\mu;\rho}P^{\rho}{}_{\gamma}P^{\nu}{}_{\delta}P^{\alpha}{}_{\sigma} \\ &= \widetilde{Y}^{\mu}{}_{;\nu\rho}P^{\nu}{}_{\delta}P^{\alpha}{}_{\mu}P^{\rho}{}_{\gamma} - \widetilde{Y}^{\mu}{}_{;\nu}n^{\nu}P^{\alpha}{}_{\mu}K_{\delta\gamma} - K_{\mu\delta}K^{\alpha}{}_{\gamma}\widetilde{Y}^{\mu} \end{aligned} \tag{a-5} $$

よって (a-4) は

$$ {}^{(3)}R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}\widetilde{Y}^{\beta} = {}^{(4)}R^{\mu}{}_{\beta\rho\nu}P^{\nu}{}_{\delta}P^{\alpha}{}_{\mu}P^{\rho}{}_{\gamma}\widetilde{Y}^{\beta} - (K_{\mu\delta}K^{\alpha}{}_{\gamma} - K_{\mu\gamma}K^{\alpha}{}_{\delta})\,\widetilde{Y}^{\mu} $$

となる. これが任意の $\widetilde{Y}^{\mu}$ について成立することから,

$$ {}^{(3)}R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = {}^{(4)}R^{\mu}{}_{\sigma\rho\nu}P^{\alpha}{}_{\mu}P^{\sigma}{}_{\beta}P^{\rho}{}_{\gamma}P^{\nu}{}_{\delta} - K^{\alpha}{}_{\gamma}K_{\beta\delta} + K^{\alpha}{}_{\delta}K_{\beta\gamma} \tag{a-6} $$

が成り立つ. 式 (a-6) において α と γ で縮約して $P^{\beta\delta}$ をかけると

$$ \begin{aligned} {}^{(3)}R &= {}^{(4)}R^{\mu}{}_{\sigma\rho\nu}P^{\rho}{}_{\mu}P^{\sigma\nu} - K^2 + K^{i}{}_{l}K^{l}{}_{i} \\ &= {}^{(4)}R + 2n^{\mu}n^{\nu\,(4)}R_{\mu\nu} - K^2 + K_{ij}K^{ij} \end{aligned} \tag{a-7} $$

となる. さて, 式 (1-72) は,

$$ {}^{(4)}R_{\mu\nu}n^{\mu}n^{\nu} + \frac{1}{2}\,{}^{(4)}R = 8\pi\rho_H \tag{a-8} $$

となるが, 式 (a-7) を代入すると

$$ {}^{(3)}R + K^2 - K_{ij}K^{ij} = 16\pi\rho_H \tag{a-9} $$

となって, 式 (1-75) が導けた. 次に式 (1-76) を導出する.

$$ \begin{aligned} (K_{\alpha}{}^{\beta})_{\|\beta} - (K^{\beta}{}_{\beta})_{\|\alpha} &= (-n_{\mu;\tau}P^{\mu\sigma}P^{\tau}{}_{\rho})_{;\nu}P^{\nu}{}_{\sigma}P^{\rho}{}_{\alpha} + (n_{\mu;\nu}P^{\mu\nu})_{;\tau}P^{\tau}{}_{\alpha} \\ &= (-n_{\mu;\tau\nu} + n_{\mu;\nu\tau})\,P^{\mu\nu}P^{\tau}{}_{\alpha} \\ &\quad + [-n_{\mu;\tau}P^{\mu\nu}P^{\tau}{}_{\rho;\nu}P^{\rho}{}_{\alpha} + n_{\mu;\nu}P^{\mu\nu}{}_{;\tau}P^{\tau}{}_{\alpha}] \end{aligned} \tag{a-10} $$

となるが, 式 (a-10) の第 1 項はリーマンテンソルを用いて

$$ \begin{aligned} \text{第 1 項} &= {}^{(4)}R_{\mu\beta\tau\nu}n^{\beta}P^{\mu\nu}P^{\tau}{}_{\alpha} \\ &= -{}^{(4)}R_{\beta\tau}n^{\beta}P^{\tau}{}_{\alpha} \end{aligned} \tag{a-11} $$

となる．第 2 項は $a^\mu \equiv n^\mu{}_{;\nu} n^\nu$ として

$$第\,2\,項 = -a^\mu \left(n_{\alpha;\mu} - n_{\mu;\alpha} - n_\alpha a_\mu\right)$$

となるが，$a^0 = 0$, $n_i = 0$, に注意すると，(a-10) は γ_{ij} に関する共変微分 $|$ を用いて

$$K_i{}^j{}_{|j} - K_{|j} = -\,{}^{(4)}R_{\mu\nu} n^\mu P^\nu{}_i \tag{a-12}$$

となる．式 (a-12) の右辺は式 (1-73) の左辺に負号を付けたものだから，結局式 (1-76)

$$K_i{}^j{}_{|j} - K_{|j} = 8\pi J_i \tag{a-13}$$

を得る．最後に式 (1-77) を導出しよう．このためには，まずアインシュタイン方程式 (1-54) のトレースをとる．

$$-R = 8\pi T \tag{a-14}$$

ここで，T は，$T_{\mu\nu}$ のトレースであるが，式 (1-79) より

$$R = 8\pi(\rho_H - S^l{}_l) \tag{a-15}$$

と書ける．ここで $S^l{}_l = P^{\mu\nu} S_{\mu\nu}$．したがって，式 (1-54) のアインシュタイン方程式は，

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= 8\pi T_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu} R \\ &= 8\pi\ (T_{\mu\nu}) + 4\pi g_{\mu\nu}\ (\rho_H - S^l{}_l) \end{aligned} \tag{a-16}$$

としてもよい．そこで，式 (a-16) を n^μ に垂直な方向に射影する

$$P^\mu{}_i P^\nu{}_j R_{\mu\nu} = 8\pi\ (S_{ij} + \frac{1}{2}\ P_{ij}\ (\rho_H - S^l{}_l)) \tag{a-17}$$

となるが，今から左辺を計算する．

式 (a-6) を α と γ で縮約して，$\beta = i$, $\delta = j$ とすると

$${}^{(3)}R_{ij} = {}^{(4)}R^\mu{}_{i\rho j}\ (\delta^\rho{}_\mu + n^\rho n_\mu) + K_j{}^l K_{il} - K K_{ij} \tag{a-18}$$

したがって式 (a-18) を使うと式 (a-17) は，

$$\begin{aligned} &{}^{(3)}R_{ij} + K K_{ij} - K_j{}^l K_{il} - {}^{(4)}R_{\mu i\rho j} n^\mu n^\rho \\ &= 8\pi\ (S_{ij} + \frac{1}{2}\ \gamma_{ij}\ (\rho_H - S^l{}_l)) \end{aligned} \tag{a-19}$$

となる．残った問題は

$${}^{(4)}R_{\mu i\rho j} n^\mu n^\rho = n_\mu n^\rho \left(\frac{\partial \Gamma^\mu_{ij}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial \Gamma^\mu_{\rho i}}{\partial x^j} + \Gamma^\mu_{\sigma\rho}\Gamma^\sigma_{ij} - \Gamma^\mu_{\sigma j}\Gamma^\sigma_{\rho i}\right) \tag{a-20}$$

の計算である．これは根気よく計算を実行すると

$$R_{\mu i\rho j}\ n^\mu n^\rho = -\frac{1}{\alpha}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\ K_{ij} - \beta^m K_{ij|m} - \beta^m{}_{|j} K_{mi} - \beta^m{}_{|i} K_{mj} + \alpha_{|ij}\right\} \tag{a-21}$$

となる. 式 (a-21) を (a-20) に代入して整理すると

$$\frac{\partial}{\partial t} K_{ij} = \alpha \, ({}^{(3)}R_{ij} + KK_{ij}) - 2\alpha K_{il}K^{l}{}_{j}$$
$$-8\pi\alpha \, (S_{ij} + \frac{1}{2} \, \gamma_{ij}(\rho_H - S^{l}{}_{l})) \tag{a-22}$$
$$-\alpha_{|ij} + \beta^{m}{}_{|j}K_{mi} + \beta^{m}{}_{|i}K_{mj} + \beta^{m}K_{ij|m}$$

となって, 式 (1-77) が得られる.

b) (3+1) 次元形式での流体力学の方程式

エネルギー方程式は

$$n_\mu T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \tag{b-1}$$

であるが, 式 (b-1) の左辺を書き換えると

$$(n_\mu T^{\mu\nu})_{;\nu} - T^{\mu\nu} n_{\mu;\nu} = 0 \tag{b-2}$$

となる. $T_{\mu\nu}$ としては, 完全流体を考えているので

$$T_{\mu\nu} = (\rho + \rho\epsilon + p) \, u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu} \tag{b-3}$$

ここで, u_μ は流体の 4 元速度, ρ は質量密度, ϵ は単位質量当たりの内部エネルギー, p は圧力である. ρ_H, J^ν, $S^{\mu\nu}$ は, 定義 (式 (1-72) から (1-74) の右辺) より

$$\rho_H = (\alpha u^0)^2 \, (\rho + \rho\epsilon + p) - p \tag{b-4}$$

$$J^\nu = (\alpha u^0) \, (\rho + \rho\epsilon + p) \, (u^\nu - (\alpha u^0) \, n^\nu) \tag{b-5}$$
$$= \frac{\rho_H + p}{(\alpha u^0)} \, (u^\nu - (\alpha u^0) \, n^\nu)$$

$$S^{\mu\nu} = \frac{J^\mu J^\nu}{\rho_H + p} + pP^{\mu\nu} \tag{b-6}$$

となる. 式 (b-6) で p は圧力, $P^{\mu\nu}$ は射影テンソルであることに注意しよう.

式 (1-79) から

$$n_\mu T^{\mu\nu} = -n^\nu \rho_H - J^\nu \tag{b-7}$$

であるが, 式 (b-4) と (b-5) を代入すると

$$n_\mu T^{\mu\nu} = -\Big(n^\nu \rho_H + \frac{(\rho_H + p)}{\alpha u^0} \, (u^\nu - (\alpha u^0) \, n^\nu) \, \Big)$$
$$= -\Big(\rho_H \, \frac{u^\nu}{\alpha u^0} + p \, \big(\frac{u^\nu}{\alpha u^0} - n^\nu\big)\Big) \tag{b-8}$$

式 (b-2) の第 1 項はベクトルの発散ゆえ, 式 (1-64) の n^ν の表式に注意すると

$$
\begin{aligned}
\text{(b-2) の第 1 項} = -\Big(& \frac{1}{\alpha\sqrt{\gamma}}\ \frac{\partial}{\partial t}\ (\sqrt{\gamma}\ \rho_H) \Big) \\
& + \frac{1}{\alpha\sqrt{\gamma}}\ \frac{\partial}{\partial x^l}\ \left(\sqrt{\gamma}\ \rho_H V^l + \sqrt{\gamma}\ p\ (V^l + \beta^l)\right)
\end{aligned}
\tag{b-9}
$$

を得る. ここで

$$
V^l = \frac{u^l}{u^0}
$$

である. 式 (b-2) の第 2 項は

$$
-T^{\mu\nu} n_{\mu;\nu} = -J^\mu n_{\mu;\nu} n^\nu - S^{\mu\nu} n_{\mu;\nu} \tag{b-10}
$$

加速度 $a_\mu = n_{\mu;\nu} n^\nu$ は

$$
a_0 = \frac{\beta^i}{\alpha}\ \frac{\partial \alpha}{\partial x^i}\ , \qquad a_i = \frac{1}{\alpha}\ \frac{\partial \alpha}{\partial x^i}
$$

となるが, $J^0 = 0$ に注意すると式 (b-10) は

$$
-T^{\mu\nu} n_{\mu;\nu} = -\frac{J^l}{\alpha}\ \frac{\partial \alpha}{\partial x^l} + \frac{J^k J^l K_{kl}}{\rho_H + p} + pK \tag{b-11}
$$

と書くことが出来る. 式 (B-9) と (b-11) を (b-2) に代入してエネルギー方程式

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t}\ (\sqrt{\gamma}\ \rho_H) + \frac{\partial}{\partial x^l}\ (\sqrt{\gamma}\ \rho_H V^l) \\
& = -\frac{\partial}{\partial x^l}\ (\sqrt{\gamma}\ p\ (V^l + \beta^l)) + \alpha\sqrt{\gamma}\ pK \\
& -\sqrt{\gamma}\ \frac{\partial \alpha}{\partial x^l}\ J^l + \alpha\sqrt{\gamma}\ \frac{J^k J^l}{\rho_H + p}\ K_{kl}
\end{aligned}
\tag{b-12}
$$

を得る. 運動方程式は $n_i = 0$ に注意すると

$$
P_{i\mu} T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = (g_{i\mu} T^{\mu\nu})_{;\nu} = (T_i{}^\nu)_{;\nu} = 0 \tag{b-13}
$$

となる. $T_i{}^\nu$ は式 (b-5) と (b-6) を考慮して

$$
\begin{aligned}
T_i{}^\nu & = n_i n^\nu \rho_H + n_i J^\nu + J_i n^\nu + S_i{}^\nu \\
& = J_i n^\nu + \frac{J_i J^\nu}{\rho_H + p} + p\delta_i{}^\nu \\
& = \frac{u^\nu}{\alpha u^0} J_i + p\delta_i{}^\nu
\end{aligned}
\tag{b-14}
$$

となる.

2 階の対称テンソルの発散に関する公式より

$$
T_i{}^\nu{}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\ \frac{\partial}{\partial x^\nu}\ (\sqrt{-g}\ T_i{}^\nu) - \frac{1}{2}\ \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i}\ T^{\alpha\beta} = 0 \tag{b-15}
$$

右辺第 1 項は式 (b-14) を使うと

$$第1項 = \frac{1}{\alpha\sqrt{\gamma}}\ \frac{\partial}{\partial x^\nu}\ \left(\sqrt{\gamma}\ J_i\ \frac{u^\nu}{u^0} + \alpha\sqrt{\gamma}\ p\delta_i{}^\nu\right)$$
$$= \frac{1}{\alpha\sqrt{\gamma}}\ \left\{\frac{\partial}{\partial t}\ (\sqrt{\gamma}\ J_i) + \frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{\gamma}\ J_i V^l) + \frac{\partial}{\partial x^i}\ (\alpha\sqrt{\gamma}\ p)\right\} \tag{b-16}$$

となる.

$$第2項 = -\frac{1}{2}\ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^i}\ \left(n^\mu n^\nu \rho_H + J^\nu n^\mu + J^\mu n^\nu + \frac{J^\mu J^\nu}{\rho_H + p} + p \cdot P^{\mu\nu}\right) \tag{b-17}$$

となるが, $J^0 = 0$, $P^{00} = 0$, $P^{0i} = 0$ に注意すると

$$\begin{aligned} 第2項 = &-\frac{1}{2}\ \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}\ \frac{\rho_H}{\alpha^2} - \frac{\partial \beta_l}{\partial x^i}\ \left(-\frac{\beta^l}{\alpha^2}\ \rho_H + \frac{J^l}{\alpha}\right) \\ &-\frac{1}{2}\ \frac{\partial \gamma_{kl}}{\partial x^i}\ \left(\frac{\beta^k\beta^l}{\alpha^2}\ \rho_H - \frac{1}{\alpha}\ (\beta^l J^k + \beta^k J^l)\right. \\ &\left.+\frac{J^k J^l}{(\rho_H + p)} + p\gamma^{kl}\right) \end{aligned} \tag{b-18}$$

$g_{00} = -\alpha^2 + \beta_l \beta^l$ を代入して

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\alpha}\ \frac{\partial \alpha}{\partial x^i}\ \rho_H - \frac{1}{\alpha}\ J_l\ \frac{\partial \beta^l}{\partial x^i} \\ &-\frac{1}{2}\ \frac{\partial \gamma_{kl}}{\partial x^i}\ \frac{J^k J^l}{\rho_H + p} - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\ \frac{\partial \sqrt{\gamma}}{\partial x^i}\ p \end{aligned} \tag{b-19}$$

式 (b-19) と (b-16) を (b-15) に代入して整理すると式 (1-84)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\ (\sqrt{\gamma}\ J_i) + \frac{\partial}{\partial x^l}\ (\sqrt{\gamma}\ J_i V^l) \\ &= -\alpha\sqrt{\gamma}\ \frac{\partial p}{\partial x^i} - \sqrt{\gamma}\ (\rho_H + p)\ \frac{\partial \alpha}{\partial x^i} \\ &+\frac{1}{2}\ \alpha\sqrt{\gamma}\ \frac{\partial \gamma_{kl}}{\partial x^i}\ \frac{J^k J^l}{(\rho_H + p)}\ + \sqrt{\gamma}\ J_l\ \frac{\partial \beta^l}{\partial x^i} \end{aligned} \tag{b-20}$$

を得る. 4 元速度 u^μ は

$$u^\mu u_\mu = -1 \tag{b-21}$$

となるべきであるが, 式 (b-5) を 2 乗して

$$J^l J_l = \frac{(\rho_H + p)^2}{(\alpha u^0)^2}\ (-1 + (\alpha u^0)^2) \tag{b-22}$$

より, 式 (1-87)

$$\alpha u^0 = \frac{(\rho_H + p)}{\sqrt{(\rho_H + p)^2 - J_l J^l}} \tag{b-23}$$

となる．一般に式 (b-23) の左辺を求めるには，状態方程式 (1-88) といっしょにして解く必要がある．

c) 式 (1-97) と (1-98) の導出

(1-95) に n_μ をかけると

$$0 = n_\mu \left(n^\mu H^\nu + n^\nu H^\mu + n^\mu n^\nu H\right)_{;\nu} \tag{c-1}$$

$n_\mu n^\mu{}_{;\nu} = 0$ と $n_\mu H^\mu = 0$ に注意すると式 (c -1) は

$$-H^\nu{}_{;\nu} - n^\nu H^\mu n_{\mu;\nu} - n^\nu H_{;\nu} - H n^\nu{}_{;\nu} = 0 \tag{c-2}$$

となる．式 (c-2) で

$$\begin{aligned} n^\nu{}_{;\nu} &= \frac{1}{\alpha\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\alpha\sqrt{\gamma}\, n^\nu) = \frac{1}{\alpha\sqrt{\gamma}} \left(\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\gamma} - \frac{\partial}{\partial x^l} (\sqrt{\gamma}\, \beta^l)\right) \\ &= \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\gamma^{ij}}{2} \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} - \beta^l{}_{|l}\right) = -K \end{aligned} \tag{c-3}$$

また，

$$0 = n_\mu H^\mu = -\alpha H^0 \tag{c-4}$$

より $H^0 = 0$ だから式 (c-2) は，

$$\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \beta^l \frac{\partial}{\partial x^l}\right) H = KH - \frac{1}{\alpha\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^l} (\alpha\sqrt{\gamma}\, H^l) - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x^l} H^l \tag{c-5}$$

式 (c-5) を整理して式 (1-97)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \beta^l \frac{\partial}{\partial x^l}\right) H = \alpha K H - 2H^l \frac{\partial \alpha}{\partial x^l} - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^l} \sqrt{\gamma}\, H^l \tag{c-6}$$

を得る．式 (1-98) を得るには，式 (1-95) に $P_{i\mu}$ をかける．

$$\begin{aligned} 0 &= P_{i\mu} \left(n^\mu H^\nu + n^\nu H^\mu + n^\mu n^\nu H\right)_{;\nu} \\ &= P_{i\mu} n^\mu{}_{;\nu} H^\nu + P_{i\mu} n^\nu_{;\nu} H^\mu + P_{i\mu} n^\nu H^\mu_{;\nu} + P_{i\mu} n^\mu_{;\nu} n^\nu H \\ &= n_{i;j} H^j + n^\nu{}_{;\nu} H_i + n^\nu H_{i;\nu} + a_i H \\ &= -K_{ij} H^j - K H_i + n^\nu H_{i;\nu} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x^i} H \end{aligned} \tag{c-7}$$

第 3 項は

$$\begin{aligned} n^\nu H_{i;\nu} &= n^\nu \left(\frac{\partial H_i}{\partial x^\nu} - \Gamma^\mu_{i\nu} H_\mu\right) \\ &= n^\nu \frac{\partial H_i}{\partial x^\nu} - n^\nu \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\nu l}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{i\nu}}{\partial x^l}\right) H^l \\ &= \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \beta^l \frac{\partial}{\partial x^l}\right) H_i - \frac{1}{\alpha} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \beta_l}{\partial x^i} - \frac{\partial \beta_i}{\partial x^l} + \frac{\partial \gamma_{il}}{\partial t}\right) H^l \\ &\quad + \frac{\beta^j}{\alpha} {}^{(3)}\Gamma_{l,ij} H^l \end{aligned} \tag{c-8}$$

$$= \frac{1}{\alpha}\ \frac{\partial H_i}{\partial t} - \frac{\beta^l}{\alpha}\ H_{i|l} + K_{il}H^l - \frac{1}{\alpha}\ \beta_{l|i}H^l$$

式 (c-8) を式 (c-7) に代入して

$$0 = \frac{1}{\alpha}\ \frac{\partial H_i}{\partial t} - \frac{\beta^l}{\alpha}\ H_{i|l} - KH_i - \frac{1}{\alpha}\ \beta_{l|i}H^l + \frac{1}{\alpha}\ \frac{\partial \alpha}{\partial x^i}\ H \tag{c-9}$$

式 (c-9) を書き換えて

$$\frac{\partial H_i}{\partial t} - \beta^l\ H_{i|l} = \alpha K H_i + \beta_{l|i}H^l - \frac{\partial \alpha}{\partial x^i}\ H \tag{c-10}$$

となる．

あ　と　が　き

本書は当初 1996 年 3 月に出版予定でしたが，その後いろいろな事情で出版が大幅に遅れてしまいました．第 1 章から第 4 章の原稿を読んで適切な助言をして下さった佐々木節氏，中尾憲一氏，小島康史氏，大原謙一氏に感謝します．京大学術出版会の八木俊樹さんには大変お世話になりました．八木俊樹さんは不幸にも 1996 年 7 月に亡くなられました．この場を借りてご冥福をお祈りします．八木俊樹さんの後を引き継いで下さった京大学術出版会の鈴木哲也さんと高垣重和さんにも大変お世話になりました．

参考文献

Abramovici, A., W.E. Althouse, R.W.P. Drever, Y. Gürsel, S. Kawamura, F.J. Raab, D. Shoemaker, L. Sievers, R. Spero, K.S. Thorne, R. Vogt, R. Weiss, S.E. Whitcomb and M.E. Zucker (1992) LIGO: The laser interferometer. *Science*, **256**: 325-333.

Abramovici,A., P. Bender, R. Drever, L.S. Finn, R. Flaminio, L. Grishchuk, W.Johnson, K.Kawabe, P.Michelson, N.Robertson, A.Rüdiger, R.J.Sandeman, P.Saulson, D.Shoemaker, K.Thorne, M.Tinto, M.Tobar, R.Weiss and S.Whitcomb(1995) Gravitational wave astrophysics. In: *Proc. 1994 Snowmass Summer Study, Particle And Nuclear Astrophysics And Cosmology In The Next Millennium*, (ed. by E.W. Kolb and R. Peccei), World Scientific, pp.398-425.

Abramovici, A., W.E. Althouse, J. Camp, D. Durance, J.A. Giaime, A. Gillespie, S. Kawamura, A. Kuhnert, T. Lyons, F.J. Raab, R.L. Savage Jr, D. Shoemaker, L. Sievers, R. Spero, K.S. Thorne, R. Vogt, R. Weiss, S.E. Whitcomb and M.E. Zucker (1996) Improved sensitivity in a gravitational wave interferometer and implications for LIGO. *Phys. Lett. A*, **218**: 157-163.

Adler, S. (1982) Einstein gravity as a symmetry-breaking effect in quantum field theory. *Rev. Mod. Phys.*, **54**: 729.

AIP (1957) *American Institute of Physics Handbook* (2nd Ed.), McGraw Hill, ch.2,61-ch2,67.

Aitken, R.G. (1964) *The Binary Stars,* New York: Dover, p.151.

赤羽賢司・海部宣男・田原博人 (1988) 『宇宙電波天文学』, 共立出版.

赤坂展昌 (1990) Resonant Antenna for Continuous Gravitational Waves in the kHz Region. 博士論文 (東京大学).

Allen, C.W. (1955) *Astrphysical Quantitity,* The Athlone Press.

Alpar, M. Ali and D. Pines (1985) Gravitational Radiation from a solid-crust Neutron Stars. *Nature,* **314**: 334-336.

Anderson, D.Z. (1984) Alignment of resonant optical cavities. *Appl. Opt.*, **23**: 2944-2949.

Ando, M., K. Kawabe and K. Tsubono (1997) Signal-separation technique for a power-recycled interferometric gravitational wave detector. *Phys.Lett.A.* **237**: 13-20.

Anninos, P., D. Hobill, E. Seidel, L. Smarr and W. M. Suen (1993) Collision of Two Black Holes. *Phys. Rev. Lett.,* **71**: 2851-2854.

Araya, A. (1994) Optical mode cleaner for the interferometric gravitational wave detector. Doctor thesis of the University of Tokyo.

Araya, A., K. Kawabe, T. Sato, N. Mio and K. Tsubono (1993) Highly sensitive wideband seismometer using a laser interferometer. *Rev. Sci. Instrum.* **64**: 1337-1341.

Arfken, G. (1970) 『特殊関数と積分方程式』権平健一郎・神原武志・小山直人 (訳) (1978), 講談社.

Arnaud, J.A. and H. Kogelnik (1967) Gaussian Light Beams with General Astigmatism. *Appl. Opt.*, **8**: 1687-1693.

Arnett, W.D. and R.L. Bowers (1977) A Microscopic Interpretation of Neutron Star Structure. *Astrophys. J. Suppl.,* **33**: 415-436.

Arnett, W.D. and J.N. Bahcall, R.P. Kirshner and S.E. Woosley (1989) Supernova 1987A. *Ann. Rev. A & Ap.*, **27**: 629-700.

Arnowit, R. and S. Deser and C. W. Misner (1962) The Dynamics of General Relativity. In L. Witten (ed.) *Gravitation: Introduction to Current Research*, John Wiley and Sons, pp.227-265.

Baade and Zwicky (1934) Supernovae and Cosmic Rays. *Phys. Rev.*, **45**: 138-

馬場吉康・佐藤憲二 (1990)「電解複合研磨による金属の超鏡面化技術」,『表面科学』, **11**: 40-46.

Baba, Y. and K. Sato (1992) Super mirror-flat finishing of metal surface by electrochemical buffing. In *Proceedings of Int. Symp. on Discharges and electrical insulation in Vacuum*, Darmstadt(Germany), Sept. 1992, pp.1-10.

Bahcall, J.N. and M.H. Pinsonneault (1992) Solar Models and Neutrinos. *Rev. Mod. Phys.*, : 885-924.

Bardeen, J.M. and T. Piran (1983) General Relativisic Axisymmetric Rotating Systems : Coordinates and Equations. *Phys. Rep.*, **96**: 205-250.

Barillet, R., A. Brillet, R. Chiche, F. Clevat, L. Latrach and C.N. Man (1996) An injection-locked Nd:YAG laser for the interferometric detection of gravitational waves. *Meas. Sci. Technol.*, **7**: 162-169.

Barone, F., L. Di Fiore, L. Milano, G. Russo and S. Solimeno (1993) Fabry-Perot cavity alignment by forced tilting oscillations of the mirrors. *VIRGO Project Napoli group internal report.*

Barone, F., E. Calloni, L. Di Fiore, A. Grado, P. Hello, L. Milano and G. Russo(1996) Effects of misalignments and beam jitters in interferometric gravitational wave detectors. *Phys. Lett. A*, **217**: 90-96.

Barrow, J.D. and K. Maeda (1990) Extended inflationary universes. *Nucl. Phys.*, **B341**: 294.

Barton, M.A. and K. Kuroda (1994) Ultra-low frequency oscillator using a pendulum with crossed suspension wires. *Rev. Sci. Instrum.*, **65**: 3775-3779.

Barton, M.A., N. Kanda and K. Kuroda (1996) A low-frequency vibration isolation table using multiple crossed-wire suspensions. *Rev. Sci. Instrum.*, **67**: 3994-3999.

Batten, A. H. (1973) *Binary and Multiplesystems of Stars,* Pergamon Press.

Baures, P.Y. and C.N. Man (1993) Measurements of optical absorption at 1.06μm in low-loss materials. *Opt. Materials*, **2**: 241-247.

Baym, G. and C.J. Pethick (1979) Physics of Neutron Stars. *Ann. Rev. Astr. Astrophys.*, **17**: 415-432.

Begelman, M.C., R.D. Blandford and M.J. Rees (1980) Massive black hole binaries in active galactic nuclei. *Nature,* **287**: 307-309.

Bender, P.L., J.E. Faller and J.L.Hall (1990) Gravitational Radiation Observations on the Moon. *Proc. AIP Con. 207*, pp.637-646.

Berkin, A.L. and K. Maeda (1991) Inflation in generalized Einstein theories. *Phys. Rev.*, **D44**: 1691.

Berkin, A.L., K. Maeda, and J. Yokoyama (1990) Soft inflation. *Phys. Rev. Lett.*, **65**: 141.

Bethe, H. (1939) Energy Production in Stars. *Phys. Rev.,* **55**: 434-456.

Bethe, H. A. (1990) Supernova mechanism. *Rev. Mod. Phys.,* **62**: 801-863.

Birrell, N.D. and P.C.W. Davies (1980) Conformal-symmetry breaking and cosmological particle creation in $\lambda \phi^4$ theory. *Phys. Rev.*, **D22**: 322.

Blanchet, L. and T. Damour (1992) Hereditary effects in Gravitational Radiation. *Phys. Rev.,* **D46**: 4304-4319.

Blanchet, L., T. Damour, B.R. Iyer, C.M. Will and A.G. Wiseman (1995) Gravitational-Radiation Damping of Compact Binary Systems to Second Post-Newtonian Order. *Phys. Rev. Lett.,* **74**: 3515-3518.

Blandford, R. and S.A. Teukolsky (1975) On the Measurement of the Mass of PSR1913+16. *Astrophys. J.,* **198**: L27-L29.

Blandford, R. and S.A. Teukolsky (1976) Arrival-Time Analysis for a Pulsar in a Binary System. *Astrophys. J.,* **205**: 580-591.

Bildsten, L. and C. Cutler (1992) Tidal Interactions of Inspiralling Compact Binaries. *Astrophys. J.,* **400**: 175-180.

Bionta, R. et al. (1987) Observation of a Neutrino Burst in Coincidence with Supernova 1987A in the Large Magellanic Cloud. *Phys. Rev. Lett.,* **58**: 1494-1496.

Blair,D.G., L. Ju and M. Notcutt(1993) Ultra high Q pendulum suspensions for gravitational wave detectors. *Rev. Sci. Instrum.*, **64**: 1899-1904.

Blair, D.G, J. Liu, E.F. Moghaddam and L. Ju(1994) Performance of an ultra low-frequency folded pendulum. *Phys. Lett. A*, **193**: 223-226.

Blanchet, L.,T. Damour and G. Schäfer(1990) Post-Newtonian hydrodynamics and post-Newtonian gravitational wave generation for numerical relativity. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **242**: 289-305.

Bocko, M.F., L. Narici, D.H. Douglass and W.W. Johnson (1983) A proposed back action evading read-out for a gravitational wave detector. *Phys. Lett. A*, **97**: 259-262.

Bondu, F. and J.-Y. Vinet (1995) Mirror thermal noise in interferometric gravitational-wave detectors. *Phys. Lett. A*, **198**: 74-78.

Bondu, F., P. Freitschel, C.N. Man and A. Brillet (1996) Ultrahigh-spectral-purity laser for the VIRGO experiment. *Opt. Lett.*, **21**: 582-584.

Born, M. and E. Wolf (1974) *Principles of Optics*, Pergamon. (『光学の原理』 草川徹・横田英嗣 (訳) (1974), 東海大学出版会.)

Born, M. and E. Wolf (1980) *Principles of Optics Sixth Ed.*, Pergamon Press, p. 87.

Boughn,S.P., S.J. Van Hook and C.M. O'Neill (1990) Observational limits on a millihertz stochastic background of gravitational radiation. *Astrophys. J.*, **354**: 406-410.

Boulware, D.G. and S. Deser (1985) String-generated gravity models. *Phys. Rev. Lett.*, **55**: 265.

Braccini, S., C. Bradaschia, M. Cobal, R. Del Fabro, A. di Virgilio, R. Flaminio, A. Giassi, A. Giazotto, H. Kautzky, V. Montelatici, M. Morganti, D. Passuello and Z. Zhang(1993) Design and operation of an interferometer developed to test the suspensions of the VIRGO gravitational wave antenna. *Phys. Lett. A*, **173**: 252-256.

Braccini, S., C. Bradaschia, M. Cobal, R. Del Fabro, A. di Virgilio, R. Flaminio, A. Giazotto, H. Kautzky, V. Montelatici and D. Passuello (1993) An improvement in the VIRGO super attenuator for interferometric detection of gravitational waves: The use of a magnetic antispring(1993) *Rev. Sci. Instrum.*, **64**: 310-313.

Braccini, S., C. Bradaschia, R. Del Fabbro, A. di Virgilio, I. Ferrante, F. Fidecaro, R. Flaminio, A. Gennai, A. Giassi, A. Giazotto, G. Gorini, G. Losurdo, M. Morganti, F. Palla, D. Passuello, R. Poggiani, G. Torelli and Z. Zhang (1995) Improvement on the test mass suspensions of the VIRGO laser interferometer gravitational wave detector. *Phys. Lett. A*, **199**: 307-314.

Bradaschia, C., R. Del Fabro, L. Di Fiore, A. di Virgilio, A. Giazotto, H. Kautzky, V. Montelatici and D. Passuello(1989) First results on the electronic cooling of the Pisa seismic noise super-attenuator for gravitational wave detection (1989). *Phys. Lett. A*, **137**: 329-333.

Bradaschia, C., R. Del Fabbro, A. Di Virgilio, R. Flaminio, S. Galeotti, A. Giazotto, H. Kautzky, V. Montelatici, M. Morganti, D. Passuello, E. Calloni and L.E. Holloway (1992) VIRGO: Very wide band interferometric gravitational wave antenna. *Nucl. Phys. B*, **28A**: 54-60.

Braginsky, V.B. and F.Y. Khalili (1992) *Quantum Measurement*, Cambridge University Press.

Braginsky, V.B. and V.I. Panov (1972) Verification of the Equivalence of Inertial and Gravitational Mass. *Sov. Phys. HETP*, **34**: 463-466.

Braginskii, V.B., V.P. Mitrofanov and O.A. Okhrimenko (1992) Oscillator for free-mass gravitational antennas. *JETP Lett.*, **55**: 432-434.

Braginsky, V.B., V.P. Mitrofanov and O.A. Okhrimenko (1993) The isolation of test mass for gravitational wave antennae. *Phys. Lett. A*, **175**: 82-84.

Braginsky, V.B., V.P. Mitrofanov and S.P. Vyatchanin (1993) Isolation of test masses in the advanced laser interferometric gravitational-wave antennae. *Rev. Sci. Instrum.*, **65**: 3771-3774.

Braginsky, V.B., V.P. Mitrofanov and K.V. Tokmakov (1994) On the thermal noise from the violin modes of the test mass suspension in gravitational wave antennae. *Phys. Lett. A*, **186**: 18-20.

Brans, C. and R.H. Dicke (1961) Mach's principle and a relativistic theory of gravitation. *Phys. Rev.*, **124**: 925.

Breuer, R.A. (1975) Gravitational Perturbation Theory and Synchrotron Radiation. *Lecture Notes in Physics,* 44, Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Varlag.

Brill, D. R. and J.B. Hartle (1964) Method of the Self-Consist- ent Field in General Relativity. *Phys. Rev.*, **135**: B271-277.

Brown, L.S. and J.C. Collins (1980) Dimensional renormalization of scalar field theory in curved space-time. *Ann. Phys. (N.Y.)*, **130**: 215.

Burke, W.L. (1971) Gravitational Radiation Damping of Slowly Moving Systems Calculated Using Matched Asymptonic Expansions. *J. Math. Phys.,* **12**: 401-418.

Burrows, A. and S. E. Woosley (1986) New Constraint on the Progenitor of the Binary Pulsar: PSR1913+16. *Astrophys. J.,* **308**: 680-684.

Burrows, A.S. (1990) Neutrinos from Supernovae. In A.G. Petschek (ed.) *Supernovae,* Springer Verlay: pp.143-181.

Burrows, A. (1995) Talk at 3rd Annual Penn State Conference (July 1995).

Callan, C.G., D. Friedan, E.J. Martinec, and M.J. Perry (1985) Strings in background fields. *Nucl. Phys.*, **B262**: 593.

Eardley (1975) Observable effects of a scalar gravitational field in a binary pulsar. *Astrophys. J.*, **196**: L59.

Carr, B.J. and M. Rees (1979) The anthropic principle and the structure of the physical world. *Nature,* **278**: 605-612.

Carr, B.J. (1980) Cosmological Gravitational Waves: Their Origin and Consequences. *Astron.& Astrophys.,* **89**: 6-21.

Carter, B. (1971) Axisymmetric Black Hole Has Only Two Degrees of Freedom. *Phys. Rev. Lett.,* **26**: 331-333.

Centrella, J. and S.L.W. McMillan (1993) Gravitational Radiation from non-axisymmetric Collisions of Neutron Stars. *Astrophys. J.,* **416**: 719-732.

Chandrasekhar, S. (1939) *Stellar Structure,* Dover.

Cinquegrana, C., E. Majorana, N. Pergola, P. Puppo, P. Rapagnani, and F. Ricci (1994) Signal-to-noise ratio analysis for a back-action-evading measurement on a double harmonic oscillator. *Phys. Rev. D*, **50**: 3596-3607.

Chandrasekhar, S. (1970) The Effect of Gravitational Radiation on the Secular Stability of the Maclaurin Spheroid. *Astrophys. J.,* **161**: 561-569.

Chandrasekhar, S. (1992) *The Mathematical Theory of Black Hole,* Oxford Science Publications.

Chandrasekhar, S. and F.P. Esposito (1969) The $2\frac{1}{2}$−Post-Newtonian Equations of Hydrodynamics and Radiation Reaction in General Relativity. *Astrophys. J.,* **160**: 153-179.

Chandrasekhar, S. and S. Detweiler(1975) The quasi-normal mode of the Schwarzschild Black Hole. *Proc. R. Soc. A.,* **344**: 441-452.

Cheng, E.A.P. and T.J. Kane (1991) High-power single-mode diode-pumped Nd:YAG laser using a monolithic nonplanar ring resonator. *Opt. Lett.*, **16**: 478-480.

Chernoff, D.F. and L.S. Finn (1993) Gravitational Radiation, Inspiraling Binaries and Cosmology. *Astrophys. J.,* **411**: L5-L8.

Chitre, D. M. and J. B. Hartle (1976) Stationary Configuration and the Upper Bound of the Mass of Non-rotating Causal Neutron Stars. *Astrophys. J.,* **207**: 592.

Ciufoline, L. and F. Fidecaro (1997) *Gravitational Waves: Sources and Detectors*, World Scientific, p.120.

Clark, J.P.A. and D.M. Eardley (1977) Evolution of Close Neutron Star Binaries. *Astrophys. J.,* **215**: 311-322.

Cregut, O., C.N. Man, D. Shoemaker, A. Brillet, A. Menhert, P. Peuser, N.P. Schmitt, P. Zeller and K. Wallmeroth (1989) 18W single-frequency operation on an injection-locked, CW, Nd:YAG laser. *Phys. Lett. A*, **140**: 294-298.

Cutler, C., T. Apostolatos, L. Bildsten, L.S. Finn, E.E. Flanagan, D. Kennefick, D.M.Markovic, A. Ori, E. Poisson, G.J. Sussman and K. Thorne (1993a) The Last three minutes: issues in gravitational-wave measurements of coalescing compct binaries. *Phys. Rev. Lett.,* **70**: 2984-2987.

Cutler, C., L.S. Finn, E. Poisson and G.J. Sussman (1993b) Gravitational Radiation from a particle in circular orbit around a black hole II Numerical Results for the non-rotating case. *Phys. Rev.,* **D47**: 1511-1518.

Cutler, C. and E.E. Flanagan (1994) Gravitational Waves from Merging Compact Binaries: How accurately can one extract the binary's parameters from the inspiral wave form? *Phys. Rev.,* **D49**: 2658-2697.

Curraso, L., L.A. Aguilan and E. Recillas-Cruz (1982) A Comparative Study of Rotational Properties of High-Velocity and Low-Velocity Early-type Stars. *Astrophys. J.,* **261**: L47-L50.

Damour, T. (1987) The problem of motion in Newtonian and Einstein gravity. In S.W. Hawking and W. Israel (eds.) *300 years of Gravitation*, Cambridge Univ. Press. pp128-198.

Damour, T., G. W. Gibbons and J.H. Taylor (1988) Limits on the Variability of G Using Binary-Pulsar Data. *Phys. Rev. Lett.,* **61**: 1151-1154.

Damour, T. and J. H. Taylor (1991) On the Orbital Period Change of the Binary Pulsar PSR1913+16. *Astrophys. J.,* **366**: 501-511.

Damour, T and J. H. Taylor (1992) Strong-fields tests of relativistic gravity and binary pulsar. *Phys. Rev.* **D45**: 1840-1868.

Danzmann, K., H. Lük, A. Rüdiger, R. Schilling, M. Schrempel, W. Winkler, J. Hough, G.P. Newton, N.A. Robertson, K.A. Strain, J.R.J. Bennet, V. Kose, M. Kühne, B.F. Schutz, D. Nicholson, J. Schuttleworth, H. Welling, P. Aufmuth, R. Rinkleff, A. Tünnermann and B. Willke (1994) GEO600 Proposal for a 600m laser-interferometric gravitational wave antenna. *Max-Plank-Institut für Quantenoptik*, **MPQ 190**.

Danzmann, K., H. luck, R. Rugiger, R. Schilling, M. Schrempel, W. Winkler, J. Hough, G.P Newton, N.A. Robertson, H. Ward, A.M. Campbell, J.E. Logan, D.I. Robertson, K.A. Strain, J.R.J. Bennett, V. Kose, M. Kuhne, B.F. Schutz, D. Nicolson, J. Shuttleworth, H. Welling, P. Aufmuth, R. Rinkleff, A. Tunnermann and B. Willke (1995) GEO600: A 600m Laser Interferometric Gravitational Wave Antenna. *Gravitaional Wave Experiment* World Scientific: 100-111.

Davies, M. B., W. Benz, T. Piran and F. K. Thielemann (1994) Merging Neutron Stars I Initial Results for Coalescence of non-corotating systems. *Astrophys. J.,* **431**: 742-753.

Davis, M., R. Ruffini, H. Press and R. H. Price (1971) Gravitational Radiation from a Particle Falling into a Schwarzschild Black Hole. *Phys. Rev. Lett.*, **27**: 1466-1469.

Day, T., E.K. Gustafson and R.L. Byer (1992) Sub-Hertz relative frequency stabilization of two-diode laser-pumped Nd:YAG lasers locked to a Fabry-Perot interferometer. *IEEE J. Quantum Electron.*, **28**: 1106-1117.

Del Fabro, R., A. di Virgilio, A. Giazotto, H. Kautzky, V. Montelatici and D. Passuello (1987) Three-dimensional seismic super-attenuator for low frequency gravitational wave detection. *Phys. Lett. A*, **124**: 253-257.

Del Fabro, R., A. di Virgilio, A. Giazotto, H. Kautzky, V. Montelatici and D.Passuello (1988a) Performance of a gas spring harmonic oscillator. *Rev. Sci. Instrum.* **59**: 292-297.

Del Fabro, R., A. di Virgilio, A. Giazotto, H. Kautzky, V. Montelatici and D. Passuello (1988b) Low frequency behaviour of the Pisa seismic noise super-attenuator for gravitational wave detection (1988). *Phys. Lett. A*, **133**: 471-475.

Del Fabro, R., A. di Virgilio, A. Giazotto, H. Kautzky, V. Montelatici and D. Passuello (1988c) First results from the Pisa seismic noise super-attenuator for low-frequency gravitational wave detection (1988). *Phys. Lett. A*, **132**: 237-240.

Demarque, P., C. P. Peliyannis and A. Sarajedini (1991) Ages of Globular Clusters. In T. Shanks (ed.) *Observational tests of cosmological Inflation*, Kluwer Academic Publisherfs, pp.111-129.

Detweiler, S. (1980) Black Holes and Gravitational Waves III The Resonant Frequencies of Rotating Holes. *Astrophys. J.,* **239**: 292-295.

DeWitt, S. and R. W. Brehme, (1960) Radiative Damping in a Gravitational Field. *Ann. Phys.,* **9**: 220-259.

Dhurandhar,S.V., D.G. Blair and M.E. Costa (1996) Possibility of detecting gravitational waves from millisecond pulsars by resonant bar antennas. *Astron. & Astrophys.*, **311**: 1043-1048.

Dicus, D. A. (1972) Stellar Energy - Loss Ratios in a Convergent Theory of Weak and Electromagnetic Interactions. *Phys. Rev.*, **D6**: 941.

Dicus, D. A., E. W. Kolb, D. V. Schramm and D. L. Tubbes (1976) Neutrino Pair Bremsstrahlung Including Neutral Currents Effects. *Astrophys. J.*, **210**: 481.

Dressler, A., A.Oemler, W.B.Sparks and R.Cucas (1994) New Image of the Distant Rich Cluter CL0939+4713 with WFPC2. *Astrophys. J.*, **435**: L23-L26.

Drever, R. (1983) Interferometric detectors for gravitational radiation. In N.Deruelle and T.Piran (ed.) *Gravitation Radiation*, North-Holland, pp.321-338.

Drever, R.W.P., J.L. Hall, F.V. Kowalski, J. Hough, G.M. Ford, A.J. Munley and H. Ward (1983) Laser phase and frequency stabilization using an optical resonator. *Appl. Phys. B*, **31**: 97-105.

Eardley, D. M. (1975) Observable Effects of a Scalar Gravitational Field in a Binary Pulsar. *Astrophys. J.*, **196**: L59-L62.

Eddington, A. S. (1926) *The internal Constitution of Stars*, Dover

Efstathiou, G., R. S. Ellis and B. Peterson (1988) Analysis of a Complete galaxy redshift survey. *MNRAS*, **232**: 431-461.

Einstein, A. (1905) Zur Elektrodynamik bewegten Koerper. *Ann. der Phys.*, **17** : 892-921. (中村誠太郎・谷川安孝・井上健 (訳) 『アインシュタイン選集1』共立出版, 1970, pp.19-57.)

Einstein, A. (1916) Die Grundlarge der algemeiner Relativistät theorie. *Ann. der Phys. ser 4*, **49** : 769 – 822. (内山龍雄 (訳) 『アインシュタイン選集2』共立出版, 1970, pp.60-114.)

Endal, A. S. and S. Sofia (1978) The Evolution of Rotating Stars II Calculations with Time Dependent Redistribution of Angular Momentum for 7 and 10 $M_\odot$ Stars. *Astrophys. J.*, **220**: 279-290.

Endal, A. S. and S. Sofia (1979) The Evolution of Rotating stars III Predicted Surface Rotation Velocities for Stars which Conserve Total Angular Momentum. *Astrophys. J.*, **232**: 531-539.

Eötovös, R.V. , D. Pekar and E. Fekete (1922) Beitraege zum Gesetze der Proportionalitaete von Traegheit und Gravitaet. *Ann. der Phys.*, **68** : 11-66.

Epstein, R. and R.V. Wagoner (1975) Post-Newtonian Generation of Gravitational Waves. *Astrophys. J.*, **197**: 717-723.

Epstein, R. (1977) The Binary Pulsar: Post-Newtonian Timing Effects. *Astrophys. J.*, **316**: 92-100.

Epstein, R. (1979) ERRATA *Astrophys. J.*, **231**: 644-644.

ESA (1994) Horizon 2000 Plus. *ESA Report.*

ESA LISA Working Group (1993) Proposal for Laser Interferometer Gravitational Wave Detector in Space. *Max-Plank-Institut für Quantenoptik*, **MPQ 177**.

ESA LISA Working Group (1994) LISA for gravitational wave measurements. *ESA Assessment Study Report*, **SCI(94)**: 6.

Evans, C., I. Iben and L. Smarr (1987) Degenerate Dwarf Binaries as Promising Detectable Sources of Gravitational Radiation. *Astrophys. J.*, **323**: 129-139.

Evans, R., S. van den Bergh and R.D. McClure (1988) Revised Supernova Rates in Shapley - Ames galaxies. *Astrophys. J.*, **345**: 752-758.

Farinas, A.D., E.K. Gustafson and R.L. Byer (1994) Design and characterization of a 5.5-W, cw, injection-locked, fiber-coupled, laser-diode-pumped Nd:YAG miniature-slab laser. *Opt. Lett.*, **19**: 114-116.

Farinas, A.D., E.K. Gustafson and R.L. Byer (1995) Frequency and intensity noise in an injection-locked, solid-state laser. *J. Opt. Soc. Am. B*, **12**: 328-334.

Finn, L. S. (1991) Detectability of Gravitational Radiation from Stellars Core Collapse. *Ann. N. Y. Acad. Sci.*, **631**: 156 – 169.

Finn, L. S. (1992) Detection, Measurement and Gravitational Radiation. *Phys. Rev.*, **D46**: 5236-5249.

Finn, L.S. and D.F. Chernoff (1993) Observing binary inspiral in Gravitational radiation: One interferometer. *Phys. Rev.*, **D47**: 2198-2219.

Finn, L.S. (1994) Observational Constraints on the Neutron Star Mass Distribution. *Phys. Rev. Lett.*, **73**: 1878-1881.

Flaminio, R. and H.Heitmann (1996) Longitudinal control of an interferometer for the detection of gravitational waves. *Phys. Lett. A* **214**: 112-122.

Flannary, B.P. and E.P.J. van den Heuvel (1975) On the Origin of the Binary Pulsar PSR1913+16. *Astron. & Astrophys.*, **39**: 61-67.

Ford, L.H. and D.J. Toms (1982) Dynamical symmetry breaking due to radiative corrections in cosmology. *Phys. Rev.*, **D25**: 1510.

Forward, R.L. (1978) Wideband laser-interferometer gravitational-radiation experiment. *Phys. Rev. D*, **17**: 379-390.

Freitag, I., D. Golla, S. Knoke, W. Schöne, H. Zeller, A. Tünnermann and H.Welling (1995) Amplitude and frequency stability of a diode-pumped Nd:YAG laser operating at a single-frequency continuous-wave output power of 20W. *Opt. Lett.*, **20**: 462-464.

Fricke, K.J. and R. Kippenhahn (1972) Evolution of Rotating Stars. *Ann. Rev. A. & Ap.*, **10**: 45-72.

Friedman, J.L. and B.F. Schutz (1978) Secular instability of rotating Newtonian Stars. *Astrophys. J.*, **222**: 281-296.

Frischel, P., G. Gonzalez, B. Lantz, H. Rong, P. Saha, D. Shoemaker, R. Weiss, M. Zucker and S. Whitcomb (1997) Recent resarch with the LIGO pase noise interferometer. In *Proc. TAMA International Workshop*

on Gravitational Wave Detection, Universal Academy Press, pp.137-146

Fritschel, P., D. Shoemaker, and R. Weiss(1992) Demonstration of light recycling in a Michelson interferometer with Fabry-Perot cavities. *Appl. Opt.*, **31**: 1412-1418.

藤井保憲 (1990) 『時空と重力』, 産業図書.

藤本眞克 (1990) 「低周波重力波の検出」, 『数理科学』, **329**: 27-32.

Fukugita, M. and C. Hogan (1991) Quark soup do not boil. *Nature*, **354**: 17-18.

Fukugita, M., C.J. Hogan and P.J.E. Peebles (1993) The Cosmic Distance Scale and the Hubble Constant. *Nature*, **366**: 309-312.

Fukushige, T., T. Ebisuzaki and J. Makino (1992) Gravitational Wave Burst Produced by Merying of Central Black Holes of Galaxies. *Astrophys. J.*, **346**: L61-L63.

Futamase, T. and B.F. Schutz (1983) Newtonian and Post-Newtonian approximations are asymptotic to general relativity. *Phys. Rev.*, **D28**: 2363-2372.

Futamase, T. (1983) Gravitational Radiation Reaction in the Newtonian Limit. *Phys. Rev.*, **D28**: 2373-2381.

Futamase, T. (1987) Strong Field Point-particle limit and the equations of motion in the binary pulsar. *Phys. Rev.*, **D36**: 321-329.

Gao, J., L. Ju and D.G. Blair(1995) Design of suspension systems for measurement of high-Q pendulums. *Meas. Sci. Technol.*, **6**: 269-275.

Giaime, J., D. Shoemaker and R. Weiss (1995) Power-recycled Fabry-Perot-arm Michelson interferometer with Mach-Zehnder and two-frequency length sensing systems. *to be submitted to Opt. Lett.*

Giazotto, A. (1989) Interferometric detection of gravitational waves. *Phys. Report*, **182**: 365-424.

Gillespie, A. and F. Raab (1993) Thermal noise in the test mass suspensions of a laser interferometer gravitational-wave detector prototype. *Phys. Lett. A*, **178**: 357-363.

Gillespie, A. and F. Raab (1994) Suspension losses in the pendula of laser interferometer gravitational-wave detectors. *Phys. Lett. A*, **190**: 213-220.

Gillespie, A. (1995) Thermal noise in the initial LIGO interferometer. Ph.D. thesis, Caltech.

Gillespie, A., and F. Raab (1995) Thermally excited vibrations of the mirrors of laser interferometer gravitational-wave detectors. *Phys. Rev. D*, **52**: 577-585.

Goldreich, P. and D. Lynden-Bell(1964) Gravitational Stability of Uniformly Rotating Disks. *Mon. Not. R. Astr. Soc*, **130**: 97-124.

Golla, D., S. Knoke, W. Schöne, M. Bode, A. Tünnermann and H. Welling (1995) 300-W cw diode-laser side-pumped Nd:YAG rod laser. *Opt. Lett.*, **20**: 1148-1150.

González, G.I. and P.R. Saulson (1994) Brownian motion of a mass suspended by an anelastic wire. *J. Acoust. Soc. Am.* **96**: 207-212.

González, G.I. and P.R. Saulson (1994) Brownian motion of a torsion pendulum with internal friction. *Phys. Lett. A* **201**: 12-18.

Gonzalez, J., G. Saccoccia and H. von Rohden (1993) Field Emission Propulsion. In *Proc. 23rd Intern'l Electr Propulsion Conf.(Seattle 1993).*

Gray, M.B., A.J. Stevenson, H.A. Bachor and D.E. McClelland (1993) Harmonic demodulation of nonstationary shot noise. *Opt. Lett.* **18**: 759-761.

Gunn, J.E. and J. Ostriker (1969) Acceleration of High-Energy Cosmic Rays by Pulsars. *Phys. Rev. Lett.*, **22**: 728-731.

Guth, A. (1981) Inflationary Universe: A possible solution to the horizon and flatness problem. *Phys. Rev.*, **D23**: 347-356.

Haensel, P.,B.Paczynski and P.Amsterdamski (1991) Gamma-ray bursts from colliding strange stars. *Astrophys. J.*, **375**: 209-215.

Harkness, R.P. and J.C. Wheeler, (1990) Classification of Supernovae. In G. Petshek (ed.) *Supernovae*, Springer-Verlag, pp.1-28.

Hartle, J. (1978) Bounds on the Mass and Moment of inertia of non-rotating Neutron Stars. *Phys. Reports*, **46**: 201-247.

Hawking, S.W. (1967) The occurrence of singularities in cosmology. III. Causality and singularities. *Proc. Roy. Soc. London*, **A300**: 187.

Hawking, S.W. (1972) Black holes in the Brans-Dicke theory of gravitation. Commun. *Math. Phys.*, **25**: 167.

Hawking, S.W. and R. Penrose (1969) The singularities of gravitational collapse and cosmology. *Proc. Roy. Soc. London*, **A314**: 529.

Hawking, S.W. and G.F.R. Ellis (1973) *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press.

早川幸男 (1992) 「重力波源の推定」, 中村卓史 (編) 『重力波天文学』 研究成果報告書, (1992 年 2 月), pp.273-278.

林忠四郎 (1983) 『宇宙と物理』, 培風館, pp.250-253.

Heinzel, G., J. Mizuno, R. Schilling, W. Winkler, A. Rüdiger and K. Danzmann (1996) An experimental demonstration of resonant sideband extraction for laser-interferometric gravitational wave detectors. *Phys. Lett. A*, **217**: 305-314.

Hellings, R.W. (1991) Gravitational wave detection at low and very low frequencies. In D.G. Blair (ed.) *The detection of gravitational waves*, pp. 453-475.

Hellings, R.W., et al. (1993) Mission Concept Study for Sagittarius : A Spaceborne Astronomical Gravity-Wave Interferometer. *JPL Engineering Memorandum*: pp.314-569.

Hello, P. and J.Y. Vinet (1993) Simulation of thermal effects in interferometric gravitational-wave detectors. *Phys. Lett. A*, **178**: 351-356.

Hewish, A., S.J. Bell, J.D.H. Pilkington, P.F. Scott and R.A. Collins (1968) Observation of a Rapidly Rotating Radio Source. *Nature*, **217** : 709 - 713.

Higgs, P.W. (1959) Quadratic Lagrangians and general relativity. *Nuovo Cimento*, **11**: 816.

彦坂繁雄 (1971) 『海洋物理 III』, 東海大学出版会, pp.109-123.

Hils, D., P.L. Bender and R.F. Webbink (1990) Gravitational Radiation from the Galaxy. *Astrophys. J.*, **360**: 75-94.

Hils, D. and P.L. Bender (1995) Gradual Approach to Coalescence for Compact Stars Orbiting Massive Black Holes. *Astrophys. J.*, **445**: L7-L10.

平川浩正 (1970) 『相対論』, 共立出版, pp. 1-213.

平川浩正 (1984) 「振動測定の極限」, 『精密機械』, **50**: 736-740.

平川浩正 (1985) 「重力波」, 『計測と制御』, **24**: 430-438.

平川浩正 (1986) 『相対論 (第 2 版)』, 共立出版.

Hirakawa, H., K. Narihara and M.-K. Fujimoto (1976) Theory of Antennas for Gravitational Radiation. *J. Phys. Soc. Japan*, **41**: 1093-1101.

Hirakawa, H. , K. Oide and Y. Ogawa (1978) Electric Cooling of Resistors. *J. Phys. Soc. Japan*, **44**: 337-338.

Hirata et al., (1987) Observation of a Neutrino Burst from SN1987A. *Phys. Rev. Lett.*, **58**: 1490-1493.

Hogan, C. (1986) Gravitational Radiation from Cosmological Phase Transitions. *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **218**: 629-636.

Holloway, L.E., C. Bradaschia, E. Calloni, M. Cobal, R. Del Fabbro, A. di Virgilio, S. Galeotti, A. Giazotto, H. Kautzky, V. Montelatici, M. Morganti, D. Passuello, S. Braccini, R. Flaminio, L. Di Fiore and W. Velloso (1992) A coil system for VIRGO providing a uniform magnetic field gradient. *Phys. Lett. A*, **171**: 162-166.

堀越源一 (1979) 「異形断面管の圧力による変形と応力」. In G. Horikoshi (ed.) *Proc. of the Meeting on UHV Techniques for Photon Factory*, **KEK-79-20**: 69-80.

Huang, Y. and R. Saulson (1994) A method for measuring the dependence of internal friction on stain. *Rev. Sci. Instrum.*, **65**: 2102-2106.

Hulse, R.A. and J.H. Taylor (1975) Discovery of a Pulsar in a Binary System. *Astrophys. J.*, **195**: L51-L53.

Hutchinson, J.R. (1980) Vibrations of Solid Cylinders. *J. Appl. Mech.*, **47**: 901-907.

Iess, L., B. Bertotti, G. Giampieri, A. Vecchio, R. Ambrosini, G. Comoretto, Y. Koyama and A. Messeri (1995) Search for massive coalescing binaries with the spacecraft ULYSSES. In *Gravitational Wave Experiments* , World Scientific ,pp.64-69.

今村　勤 (1994) 『物理とグリーン関数』, 岩波書店.

Isaacson, R. A. (1968a) Gravitational Radiation in the Limit of High Frequency I. *Phys. Rev.*, **166**: 1263-1271.

Isaacson, R.A. (1968b) Gravitational Radiation in the Limit of High Frequency II. *Phys. Rev.*, **166**: 1272-1280.

石田五郎 (1964) 「連星の軌道決定法」, 渡辺敏夫 (編) 『天体の軌道計算』, 恒星社, 221-267.

Israel, W. (1967) Event Horizon in Static Vacuum Space-Times. *Phys. Rev.*, **164**: 1776-1779.

伊沢孝男・山村史彦・内村龍二・薬王輝雄 (1993) 「超低損失誘電体多層膜ミラーとその応用」, 『応用物理』, **62**: 911-914.

Jacoby, G., D. Branch, R. Ciardullo, R.J. Davies, W.E. Harris, M.J. Pierce, C.J. Pritchet, J.L. Tonry, D.L. Welch (1992) A Critical Review of Selected Techniques for Measuring Extragalactic Distances. *Publ. Astron. Soc. Pacific*, **104**: 599-659.

Jakubiec, A. and J. Kijowski (1988) On theories of gravitation with non-linear Lagrangians. *Phys. Rev.*, **D37**: 1406.

Janka, T.H. and E. Müller(1994) Neutron Star Recoiles from anisotropic supernovae. *Astron.& Astrophys.*, **290**: 496-502.

Jordan, P. (1959) Zum gegenwärtigen Stand der Diracschen kosmologischen Hypothesen. *Z. Phys*, **157**: 112.

Ju, L. and D.G. Blair(1994) Compound Pendulum test mass systems for laser interferometer gravitational wave detectors. *Meas. Sci. Technol.*, **5**: 1053-1060.

Kanda, N., M.A.Barton and K.Kuroda (1994) Transfer function of a crossed wire pendulum isolation system. *Rev. Sci. Instrum.*, **65**: 3780-3783.

Kane, T.J. and R.L. Byer (1985) Monolithic, unidirectional single-mode Nd:YAG ring laser. *Opt. Lett.*, **10**: 65-67.

Kane, T.J.and E.A.P.Cheng (1988) Fast frequency tuning and phase locking of diode-pumped Nd:YAG lasers. *Opt. Lett.*, **13**: 970-972.

Kane, T.J. (1990) Intensity noise in diode-pumped single-frequency Nd:YAG lasers and its control by electronic feedback. *IEEE Phot. Lett.*, **2**: 244-245.

Kaneda, Y., M.Oka, H.Masuda and S.Kubota (1992) 7.6W of continuous-wave radiation in a TEM_{00} mode from a laser-diode end-pumped Nd:YAG laser. *Opt. Lett.* , **17**: 1003-1005.

Kaspi, V.M., J.H. Taylor and M.F. Ryba (1994) High-precision timing of millisecond pulsars III long-term monitoring of PSRs 1885+09 and 1937+21. *Astrophys. J.*, **428**: 713-728.

Kates, R.E. (1981) Undelying Structure of Singular Perturbations on Manifolds. *Ann. Phys. N.Y.*, **132**: 1-17.

加藤茂樹・青野正和・佐藤憲二・馬場吉康 (1991)「室温排気の試験容器における極高真空の発生」,『真空』, **34**: 56-61.

加藤匡也・石原良夫・小芝昇平 (1992)「大気中の湿度と初期排気特性との関係」,『真空』, **35**: 335-337.

加藤秀人・西原正満・大石政治・佐久間泰・松田七美男・斉藤芳男・堀越源一 (1995)「ホロカソード法によるパイプ内面での TiN コーティング」,『真空』, **38**: 380-383.

Kawabe, K., N. Mio and K. Tsubono(1994) Automatic alignment-control system for a suspended Fabry-Perot cavity. *Appl. Opt.*, **33**: 5498-5505.

Kawabe,K., S. Nagataki, M. Ando, K. Tochikubo, N. Mio, and K. Tsubono (1996) Demonstration of a recombined Fabry-Perot-Michelson interferometer with suspended mirrors. *Appl. Phys. B*, **62**: 135-138.

Kawamura, S. and M.E.Zucker (1994) Mirror-orientation noise in a Fabry-Perot interferometer gravitational wave detector. *Appl. Opt.* **33**: 3912-3918.

Ke, W., D.G. Blair, M. Notcutt and L. Ju (1995) Normal mode suppression in all metal cantilever vibration isolators. *Phys. Lett. A*, **197**: 275-281.

Kerr, G.A. and J. Hough (1989) Coherent addition of laser oscillators for use in gravitational wave antennas. *Appl. Phys. B*, **49**: 491-495.

Kerr, G.A., N.A. Robertson, J. Hough and C.N. Man (1985) The fast frequency stabilization of an Argon laser to an optical resonator using an extra-cavity electro-optic modulator. *Appl. Phys. B*, **37**: 11-16.

Kerr, R.P. (1963) Gravitational Field of a Spinning mass as an example of algebraically special metric. *Phys. Rev. Lett.*, **11**: 237-238.

Kidder, L., C.M. Will and A.G. Wiseman (1992) Innermost Stable Orbits for Coalescing Systems of Compact Objects . *Class. Quantum Grav.*, **9**: L125-L131.

Kidder, L.E., C.M. Will and A. Wiseman (1993) Spin Effects in the Inspiral of Coalescing Compact Binaries. *Phys. Rev.*, **D47**: R4183-4187.

Kimel, I. and L.R. Elias (1993) *IEEE Journal of Quantum Electronics*, **29**: 2562-2567

木村利栄・太田忠之 (1989)『古典および量子重力理論』, マグロウヒル.

Kimura,S., T. Suzuki and H. Hirakawa (1981) Low frequency antenna for gravitational radiation. *Phys. Lett.*, **A81**: 302-304.

Kippenhahn, A.S. and A. Weigert (1990) *Stellar Structure and Evolution*, Springer-Verlag.

小林徹郎 (1993)「光ビームの考え方」,『微小光学の物理的基礎』, 朝倉書店.

Kochanek, C.S. (1992) Coalescing Binary Neutron Stars. *Astrophys. J.*, **398**: 234-247.

Kogelnik, H. and T. Li (1966) Laser Beams and Resonators. *Proceedings of the IEEE*, **54**: 1312-1329.

Kojima, Y. and T. Nakamura (1983) Gravitational Radiation from a Particle with zero orbital angular momentum Plunging into a Kerr Black Hole. *Phys. Lett.*, **96A**: 335-338..

Kolb, E.W. and M.S. Turner (1989) *The Early Universe*, Addison-Wesley Publishing, pp.1-547.

Kosowsky, A., M.S. Turner and R. Watkins (1992) Gravitational Waves from First-order Cosmological Phase Transition. *Phys. Rev. Lett.*, **69**: 2026-2029.

Kovalik, J. and P.R. Saulson(1993) Mechanical loss in fibers for low pendulums. *Rev. Sci. Instrum.*, **64**: 2942-2946.

Koyama, K. and T. Tsuru (1992) X-Ray Probing of the Dark Matter. In Y. Suzuki and K. Nakamura (ed.) *Frontiers of Neutrino Astrophysics*, Universal Academy Press, pp.387-397.

久保亮五 (1978)『現代物理学の基礎 (第 2 版) 5 統計物理学』, 湯川秀樹他 (編), 岩波書店.

倉持　暁・柏木邦宏・内山智雄・島田雅人・坂本雄一・小海秀樹・村山洋一 (1991)「金属化合物薄膜の水素透過実験 (I)」, 第 32 回真空に関する連合講演会予稿集, pp. 181.

La, D. and P.J. Steinhardt (1989) Extended Inflationary Cosmology. *Phys. Rev. Lett.*, **62**: 376-378.

Lai, D., F. Rasio and S.L. Shapiro (1993) Hydrodynamic instability and Coalescence of Close Binary Systems. *Astrophys. J.*, **406**: L63-L66.

Lai, D. F.A. Rasio and S.L. Shapiro (1994) Hydrodynamic Instability and Coalescence of Neutron Star Binaries. *Astrophys. J.*, **420**: 811-829.

Lai, D. (1994) Resonant Oscillations and Tidal Heating in Coalescing Binary Neutron Stars. *MNRAS*, **270**: 611-629.

Lai, D and S.L. Shapiro (1995) Hydrodynamics of Coalescing Binary Neutron Stars: Ellipsoidal Treatment. *Astrophys. J.*, **443**: 705-716.

ランダウ, L. D. ／ E. M. リフシッツ (1964a)『場の古典論』, 広重　徹・恒籐敏彦 (訳), 東京図書, pp.266-423.

ランダウ, L. D. ／ E. M. リフシッツ (1964b)『力学』, 広重　徹・水戸　巌 (訳), 東京図書.

ランダウ, L. D. ／ E. M. リフシッツ (1964c)『統計熱力学』, 東京図書.

Lang, K. R. (1980) *Astrophysical Formula*, Springer-Verlag.

Laures, P. (1967) Geometric Approach to Gaussian Beam Propagation. *Appl. Opt.*, **6**: 747-755.

Leaver, E.W. (1985) An Analytic Representation for the Quasi-mormal Models of Kerr Black Holes. *Proc. R. Soc. London*, **A202**: 285-298.

Leaver, E.W. (1986) Solutions to a Generalized Spheroidal Wave Equation: Teukolsky's Equations in General Relativity. *J. Math. Phys.*, **27**: 1238-1265.

Leblanc, J.M. and J.R. Wilson (1970) A numerical example of the collapse of a rotating magnetizes star. *Astrophys. J.*, **161**: 541-551.

Lee, D.L. (1974) Conservation laws, gravitational waves, and mass losses in the Dicke-Brans-Jordan theory of gravity. *Phys. Rev.*, **D8**: 2374.

Lefrancois, M., J. Montuclard and C. Rouaud (1990) Low-load metal seals to replace elastomer O-ring: the Helicoflex-delta (Δ) seals. *Vacuum*, **41**: 1879-1881.

Leger, J.R. and W.C. Goltsos (1992) Geometrical Transformation of Linear Diode-Laser Arrays for Longitudinal Pumping of Solid-State Lasers. *IEEE J. Quantum. Electron.*, **QE-28**: 1088-1100.

Leger, J.R., D. Chen, and G. Mowry (1995) Design and performance of diffractive optics for custom laser resonators. *Appl. Opt.*, **34**: 2498-2509.

Liddle, A.R. and D.H. Lyth (1992) COBE, gravitational waves, inflation and extended inflation. *Phys. Lett.*, **B291**: 391.

LIGO Team(1994) Reduced displacement noise in the LIGO 40 meter interferometer. *LIGO Technical Report*, **TR94**-2.

Lincoln, C.W. and C.M. Will (1990) Coalescing Binary Systems of Compact Objects to (Post)$^{\frac{5}{2}}$- Newtonian Order. *Phys. Rev.*, **D42**: 1123-1143.

Lindblom, L. and S.L. Detweiler (1983) The Quadrupole Oscillations of Neutron Stars. *Astrophys. J. Supple.*, **53**: 73-92.

Lindblom, L. (1992) Determining the nuclear equation of state from neutron-star mas and radii. *Astrophys. J.*, **398**: 569-573.

Logan, J.E., N.A. Robertson, J. Hough and P.J. Veitch (1991) An investigation of coupled resonance in materials suitable for test masses in gravitational wave detectors. *Phys. Lett. A*, **161**: 101-110.

Logan, J.E., J. Hough and N.A. Robertson (1992) An investigation of limitations to quality factor measurements of suspended masses due to resonances in the suspension wires. *Phys. Lett. A*, **170**: 352-358.

Logan, J.E., J. Hough and N.A. Robertson (1993) Aspects of the thermal motion of a mass suspended as a pendulum. *Phys. Lett. A*, **183**: 145-152.

Logan, J.E., N.A. Robertson,and J. Hough (1994) Measurements of birefringence in a suspended sample of fused silica. *Opt. Commun.*, **107**: 342-346.

Logan, J.E., J. Hough and R.D. Thomson (1996) Thermal motion associated with monolithic fused silica cradle suspensions for gravitational wave detectors. *Phys. Lett. A*, **218**: 181-189.

Lyne, A.G. & D.R. Lorimer (1994) High birth velocities of radio Pulsars. *Nature*, **369**: 127-129.

Lyons, T. and F. Raab (1994) Proposal for recombination of the 40-m interferometer. *Internal report of LIGO group.*

Maeda, K. (1988) On time variation of fundamental constants in super-string theories. *Mod. Phys. Lett.*, **A3**: 243.

Maeda, K. (1989) Towards the Einstein-Hilbert action via conformal transformation. *Phys. Rev.*, **D39**: 3159.

Magnano, G., M. Ferraris and M. Francaviglia (1987) Nonlinear gravitational Lagrangians. *Gen. Rel. Grav.*, **19**: 465.

Makino, J. and T. Ebisuzaki (1994) Triple Black Hole in the Core of Galaxies. *Astrophys. J.*, **436**: 607-610.

Man, C.N., D. Shoemaker, M.P. Tu and D. Dewey (1990) External modulation technique for sensitive interferometric detection of displacements. *Phys. Lett. A*, **148**: 8-16.

Markovic, D. (1993) Possibility of determining cosmological parameters from measurements of gravitational waves emitted by coalescing compact binaries. *Phys. Rev.*, **D48**: 4738-4756.

McClintock, J. (1992) Black Holes in the Galaxy. *Ann. N. Y. Acad. Sci.*, **647**: 495-502.

Meegan, C.A. et al (1992) Spatial distribution of gamma-ray bursts observed by BATSE. *Nature*, **355**: 143-145.

Meers, B.J. (1988) Recycling in laser-interferometric gravitational-wave detectors. *Phys. Rev. D*, **38**: 2317-2326.

Meers, B.J (1989) The frequency response of interferometric gravitational wave detector. *Phys. Lett. A*, **142**: 465-470.

Meers, B.J. and K.A. Strain (1991) Modulation, signal quantum noise in interferometer. *Phys. Rev. A*, **44**: 4693-4703.

Merkowitz, S.M. and W.W. Johnson (1995) Spherical gravitational wave antennas and the truncated icosahedral arrangement. *Phys. Rev. D*, **51**: 2546-2558.

Meszaros, P. and M. Rees (1992) Tidal Heating and Mass Loss in Neutron star binaries: Implications to Gamma-ray bursts. *Astrophys. J.*, **397**: 570-575.

Mio, N. (1992) Mechanical transfer function of a pendulum suspended with a finite-mass wire. *Jpn. J. Appl. Phys.*, **31**: 1243-1244.

Mio, N. and K. Tsubono (1992) Observation of an effect due to non-stationary shot noise. *Phys. Lett. A.*, **164**: 255-258.

Misner, C.W., K.S. Thorne and J.A. Wheeler (1973) *Gravitation*, San Fransisco: Freeman.

三尾典克・大橋正健 (編)(1992) 『重力波アンテナ技術検討書』 pp.80-83.

観山正見 (1992) 「原始中性子星の重力崩壊及び分裂合体」,『重点領域研究「重力波天文学」平成 3 年成果報告書』 (中村卓史編集) pp.86-191.

Miyoshi, M., J. Moran, J. Herrnstein, L. Greenhil, N. Nakai, P. Diamond and M. Inoue (1995) Evidence for a black hole from high rotation velocities in a sub-parsec region of NGC4258. *Nature*, **373**: 127-129.

Mizuno, J., K.A. Strain, P.G. Nelson, J.M. Chen, R. Schilling, A. Rüdiger, W. Winkler and K. Danzmann (1993) Resonant sideband extraction: a new configuration for interferometric gravitational wave detectors. *Phys. Lett. A*, **175**: 273-276.

Mönchmeyer, R.M., G. Schäfer, E. Müller and R. E. Kates (1991) Gravitational waves from the collapse of rotating stellar cores. *Astron.& Astrophys.*, **246**: 417-440.

Morrison, E., B.J. Meers, D.I. Robertson and H. Ward (1994b) Experimental demonstration of an automatic alignment system for optical interferometers. *Appl. Opt.*, **33**: 5037-5040.

Morrison, E., B.J. Meers, D.I. Robertson and H. Ward (1994) Automatic alignment of optical interferometers. *Appl. Opt.*, **33**: 5041-5049.

村上敏夫 (1991) 『日本物理学会誌』, **46** : 443-449.

村上・平山・浅見 (1990) 「超高性能光学素子」, 『光学』, **19**: 650-657.

Nabors, C.D., A.D. Farinas, T. Day, S.T. Yang, E.K. Gustafson and R.L. Byer (1989) Injection locking of a 13-W CW Nd:YAG ring laser. *Opt. Lett.*, **14**: 1189-1191.

中川賢一 (1990) 「超高コヒーレントレーザー」, 『光学』, **19**: 642-649.

Nakagawa, K., M. Teshima and M.Ohtsu (1991) Injection locking of a highly coherent and high-power diode laser at 1.5μm. *Opt. Lett.*, **16**: 1590-1592.

Nakagawa, K., A.S. Shelkovnikov, T. Katsuda and M. Ohtsu (1994a) Absolute frequency stability of a diode-laser-pumped Nd:YAG laser stabilized to a high-finesse optical cavity. *Appl. Opt.*, **33**: 6383-6386.

Nakagawa, K., A.S.Shelkovnikov, T.Katsuda and M.Ohtsu (1994b) Fast frequency stability of a diode-laser-pumped monolithic Nd:YAG laser with an extra-cavity electro-optic modulator. *Opt. Comm.* **109**: 446-450.

Nakagawa, K., T. Katsuda and M. Ohtsu (1995) Short-term frequency stabilization of diode-laser-pumped Nd:YAG laser using double-pendulum suspended cavities. *Appl. Phys. B*, **60**: 489-494.

Nakamura, T. (1981) General Relativisitic Collapse of Axially Symmetric Stars Leading to the Formation of Rotating Black Holes. *Prog. Theor. Phys.*, **65**: 1876.

Nakamura, T. and M. Fukugita (1989) Rotating stellar collapse medel og supernova1987A. *Astrophys.J.* **337**: 466-469

Nakamura, T. and H. Sato (1981a) General Relativistic Collapse of Rotating Supermassive Stars. *Prog. Theor. Phys.*, **66**: 2038

Nakamura, T. and M. Sasaki (1981) Is Collapse of a Deformed Star Always Effective for the Gravitational Radiation? *Phys. Lett.*, **106B**: 69.

Nakamura, T. and K. Oohara (1983) Gravitational Radiation Emitted by N particles in Circular Orbits. *Phys. Lett.*, **98A**: 403-406.

Nakamura, T. and H. Sato (1982) General Relativistic Collapse of Non-Rotating Axisymmetric Stars. *Prog. Theor. Phys.*, **67**: 1396-1405.

Nakamura, T., K. Oohara and Y. Kojima (1987) General Relativisitc collapse to Black Hole and Gravitational Waves from Black Holes. *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, **90**: 1-217.

Nakamura, T., S.L. Shapiro and S.A. Teukolsky (1988) Naked Singularities and the Hoop Conjecture: An Analytic Exploration. *Phys. Rev.*, **D38**: 2972-2978.

Nakamura, T., M. Shibata and K. Nakao (1993) Naked Sinfularity Dreis Up? *Prog. Theor. Phys.*, **89**: 821-831.

Nakamura, T. (1994) Fully Relativistic Numerical simulations of Coalescing Binary Neutron Stars. In: *Proceedings of MG7 (Stanford July 1994)*, World Scientific,R. T. Jantzen, G. M. Keisli, I. R. Ruffini ed.,183-206.

Nakamura, Y., G.V. Latham and H.J. Dorman (1982) Apollo Lunar Seismic Experiment-Final Summary. *J. Geophys. Res.*, **87**: A117-A123.

中野道雄・美多　勉 (1982) 『制御基礎理論』, 昭晃堂.

Narayan, R., T. Piran and A. Shemi (1991) Neutron Star and Black hole Binaries in the Galaxy. *Astrophys. J.*, **379**: L17-L20.

Nelson, B. and P. Panangaden (1982) Scaling behavior of interacting quantum fields in curved spacetime. *Phys. Rev.*, **D25**: 1019.

Nelson, P.G. (1991) An active vibration isolation system for inertial reference and precision measurement. *Rev. Sci. Instrum.*, **62**: 2069-2075.

根本孝七、藤井　隆・後藤 直彦 (1995) 「可変反射体を用いた波動の強度分布整形」, 『電気学会論文誌』, **A115**: 683-690.

Ni, W.-T. (1987) Quantum-mechanical noise in an interferometer: Intrinsic uncertainty versus measurement uncertainty. *Phys. Rev. D* **35**: 3002-3007.

Nicholson, D., C.A. Dickson, W.J. Watkins, B.F. Schutz,, J. Shuttleworth, G.S. Jones, D.I. Robertson, N.L. Mackenzie, K.A. Strain, B.J. Meers, G.P. Newton, H. Ward, C.A. Cantley, N.A. Robertson, J. Hough, K. Danzmann, T.M. Niebauer, A. Rüdiger, R. Schilling, L. Schnupp and W. Winkler (1996) Results of the first coincident observations by two laser-interferometric gravitational wave detectors. *Phys. Lett. A*, **218**: 175-180.

Niebauer, T.M., R. Schilling, K. Danzmann, A. Rüdiger and W. Winkler (1991) Nonstationary shot noise and its effect on the sensitivity of interferometers. *Phys. Rev. A*, **43**: 5022-5039.

Nilsson, A.C., E.K. Gustafson and R.L. Byer (1989) Eigenpolarization theory of monolithic nonplanar ring oscillators. *IEEE J. Quantum Electron.*, **25**: 767-790.

Nomoto, K. and M. Hashimoto (1988) Presupernova Evolution of Massive Stars. *Phys. Rep.*, **163**: 13-36. Nomoto, K., H. Yamaoka, O.R. Pols, van den Veuvel, K. Iwamoto, S. Kumagai and T. Shigeyama (1994) A Carbon-Oxygen star as progenitor of the Type I_c Supernova 1994I. *Nature*, **371**: 227ff

Nordtvedt, K., Jr. (1968) Equivalence principle for massive bodies. II. Theory. *Phys. Rev.*, **169**: 1017.

大橋正健 (1994) 学位論文, 東京大学.

Coordinate Condition and Higher Order Gravitational Potential in Canonical Formalism. *Prog. Theor. Phys.*, **51**: 1598-1612.

Oide, K., Y. Ogawa and H. Hirakawa (1978) Artificial Cold Resistors. *Jpn. J. Appl. Phys.*, **17**: 429-432.

O'Murchadha, N. and J. York (1974a) Initial-Value Problem of General Relativity – General Formulation –. *Phys. Rev.*, **D10**: 428-436.

O'Murchadha, N. and J. York (1974b) Initial-Value Problem of General Relativity – Stability of Solutions of the initial Value Problem –. *Phys. Rev.*, **D10**: 437-446.

尾上公正・斉藤一也・稲吉さかえ・塚原園子 (1991) 「Ti-N 薄膜のガス放出特性と膜構造」, 『真空』, **34**: 420-426.

Oohara, K. and T. Nakamura (1984) Gravitational Waves from a Particle Scattered by a Schwarzschild Black Hole. *Prog. Theor. Phys.*, **71**: 91-99.

Oohara, K. and T. Nakamura (1989a) Gravitational Radiation from a Coalescing Binary Neutron Star I. *Prog. Theor. Phys.*, **82**: 535-554.

Oohara, K. and T. Nakamura (1989b) Gravitational Radiation from a Coalescing Binary Neutron Star II – Simulations including Back Reaction Potential. *Prog. Theor. Phys.*, **82**: 1066-1083.

Oohara, K. and T. Nakamura (1990) Gravitational Radiation from a Coalescing Binary Neutron Star III – Simulations from Equilibrium Model–. *Prog. Theor. Phys.*, **83**: 906-940.

Oohara, K. and T. Nakamura (1991) Gravitational Radiation from a Coalescing Binary Neutron Star IV – Tidal Disruption. *Prog. Theor. Phys.*, **86**: 73-88.

Oohara, K. and T. Nakamura (1992) Gravitational Radiation from a Coalescing Binary Neutron Star V – Post Newtonian Calculation. *Prog. Theor. Phys.*, **88**: 307ff.

Oppenheimer, J.R. and G. Volkoff (1939) On massive neutron cores. *Phys. Rev.*, **55**: 374-381.

Oshima, C. and Y. Baba (1989) Electro-chemical buffing. 『応用物理』, **58**: 71-72.

On the Nature of Pulsars I: Theory. *Astrophys. J.*, **157**: 1345-1417.

Pang, Yi and J.-P. Richard (1995) Room-temperature tests of an optical transducer for resonant gravitational wave detectors. *Appl. Opt.*, **34**: 4982-8.

Parker, L. and D.J. Toms (1985) Renormalization group and nonlocal terms in the curved-spacetime effective action: weak-field results. *Phys. Rev.*, **D32**: 1409.

Peng, H., D.G. Blair, A. di Virgilio, A. Giazotto, S. Braccini, C. Bradaschia, X. Chen, R. Del Fabbro, F. Fidecaro, R. Flaminio, A. Gennai, A. Giassi, G. Losurdo, M. Morganti, F. Palla, D. Passuello, R. Poggiani and Z. Zhang (1994) Test of an interferometric sapphire transducer with the super attenuator of the VIRGO gravitational wave antenna. *Phys. Lett. A*, **189**: 141-144.

Penrose, R. (1965) Gravitational collapse and space-time singularities. *Phys. Rev. Lett.*, **14**: 57.

Penrose, R. (1973) Singularities in Cosmology. IAU Symp., **64** : 82.

Peters, P.C. and J. Mathews (1963) Gravitational Radiation from Point Masses in a Keplerian Orbit. *Phys. Rev.*, **131**: 435-440.

Peters, P.C. (1964) Gravitational Radiation and the Motion of Two Point Masses. *Phys. Rev.*, **136**: B1224-1232.

Phinney, E.S. (1991) The Rate of Neutron star Binary Mergers in the Universe. *Astrophys. J.*, **380**: L17-L21.

Phinney, E.S. and S.R. Kulkarni (1994) Binary and Millisecond Pulsars. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **32**: 591-639.

Pines, D. and M. Ali Alpar (1992) Inside Neutron Stars : A 1990 Perspective. In D. Pines, R. Tamagaki and S. Tsuruta (eds.) *Structure and Evolution of Neutron Stars*, Addison Wiley 1992, 7-31.

Piran, T. and T. Nakamura (1988) Can Current Detectors Detect Gravitational Radiation from New born Pulsar ? *Prog. Thoer. Phys.*, **80**: 18-21.

Raab, F.J. (1994) The LIGO project: progress and prospects. Submitted to:*Proc. First Edoardo Amaldi Conference on Gravitational Wave Experiments.*

Raab, F.J. (1995) The LIGO Project: Progress and Prospects. In *Gravitational Wave Experiments* , World Scientific: 64-69.

Raab, F.J. and S.E. Whitcomb (1992) Estimation of Special Optical Properties of a Triangular Ring Cavity. *LIGO Tech. Rep.*, No.108: 1-8.

Rasio, F. and S.L. Shapiro (1992) Hydrodynamical Evolution of Coalescing Binary Neutron Stars. *Astrophys. J.*, **401**: 226-245.

Rasio, F. and S.L. Shapiro (1994) Hydrodynamics of Binary Coalescence I Polytropes with Stiff equations of State. *Astrophys. J.*, **432**: 242-261.

Reasenberg, R.D., I.I. Shapiro, P.E. MacNeil, R.B. Goldstein, J.C. Breidenthal, J.P. Brenkle, D.L. Cain, T.M. Kaufman, T.A. Komarek, and A.I. Zygielbaum (1979) Viking relativity experiment: Verification of signal retardation by solar gravity. *Astrophys. J.*, **234**: L219.

Rees, M. and P. Meszaros (1992) Relativistic fire balls: energy conversion and time scales *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **258**: 41-43

Regehr, M.W., F.J. Raab and S.E. Whitcomb(1995) Demonstration of a power-recycled Michelson interferometer with Fabry-Perot arms by frontal modulation. *Opt. Lett.*, **20**: 1507-1509.

Rhodes, C. and R. Ruffini (1974) Maximum Mass of a Neutron Star. *Phys. Rev. Lett.*, **32**: 324-327.

Richard, J.-P. and W.M. Folker (1991) Motion amplifiers and passive transducer. In D.G. Blair (ed.) *The detaction of gravitational waves*, pp. 169-185.

Richard, J.P. and J.J. Hamilton (1991) High-finesse measurements at low temperatures. *Appl. Opt.*, **30** (1991) 3560-3561.

Richard, J.P., J.J. Hamilton and Y. Pang (1990) Fabry-Perot optical resonator at low temperatures. *J. Low Temp. Phys.*, **81**: 189-198.

『理科年表』 (1995) 国立天文台 (編), 丸善.

Robertson, N.A., R.W.P. Drever, I. Kerr and J. Hough(1982) Passive and active seismic isolation for gravitational radiation detectors and other instruments. *J. Phys. E: Sci. Instrum.*, **15**: 1101-1105.

Robertson, N.A., S. Hoggan, J.B. Mangan and J. Hough (1986) Intensity stabilization of an Argon laser using an electro-optic modulator-Performance and limitation. *Appl. Phys. B*, **39**: 149-153.

Robertson, N.A., K.A. Strain and J. Hough (1989) Measurements of losses in high reflectance mirrors for λ=514.5nm *Opt. Commun.*, **69**: 345-348.

Robertson, N.A. (1991) Vibration isolation for the test masses in interferometric gravitational wave detectors. In D.G. Blair (ed.) *The Detection of Gravitational Waves*, Cambridge University Press, pp.353-368.

Robinson, D.C.(1975) Uniqueness of the Kerr Black Holes. *Phys.Rev.Lett.* **34**: 905.

Roll, P.G., R. Krotkov and R.H. Dicke (1964) Equivalence of inertial and passive gravitational mass. *Ann. Phys. N. Y.*, **26**: 442-517.

Ruderman, M.(1991) Newtron star crustal plate techtonics. *Astrophys.J.***366**: 264-269

Ruderman, M. (1992) Neutron Star Crust Breaking and Magnetic Field Evolution. In D. Pines, R. Tamagaki and S. Tsuruta (eds.) *Structure and Evolution of Neutron Stars*, Addison Wiley 1992; 353-370.

Rüdiger, A., R.Schilling, L.Schnupp, W. Winkler, H. Billing and K. Maischberger (1981) A mode selector to suppress fluctuations in laser beam geometry. *Opt. Acta*, **28**: 641-658.

Rüdiger, A., R. Schilling, L. Schnupp, W. Winkler, H.Billing and K. Maischberger (1981) A mode selector to suppress fluctuations in laser beam geometry. *Opt. Acta*, **28**: 641-658.

Ruffini,R. and J.A.Wheeler (1971) Relativistic cosmology and space platforms. In: *Proceedings of the conference on Space Physics*, European spacxe Research Organization, Paris France, pp. 45-174

Saenz, R.A. and S.L. Shapiro (1978) Gravitational Radiation from Stellar Core Collapse. *Astrophys. J.*, **221**: 286-303.

斎尾英行 (1992) 『星の進化』, 培風館.

斉藤一也・稲吉さかえ・塚原園子 (1991a) 「TiN を成膜したステンレス鋼箔を用いた水素透過測定」, 第 32 回真空に関する連合講演会予稿集, pp. 221.

斉藤一也・尾上公正・稲吉さかえ・塚原園子 (1991b) 「Ti-N 薄膜のガス放出特性 (III)」, 『真空』, **34**: 286-288.

Saito, Y., N. Matuda, Y. Ogawa and G. Horikoshi (1996) Vacuum system design for the 300m gravitational wave laser interferometer in Japan (TAMA300). *Vacuum*, **47**: 609-611.

桜井捷海・霜田光一 (1984) 『応用エレクトロニクス』, 裳華房.

Saleh, B.E.A. and M.C. Teich (1991) *Fundamentals of Photonics*, Wiley.

Salmon, C., D. Hills and J.L. Hall (1988) Laser stabilization at the milihertz level. *J. Opt. Soc. Am. B*, **5**: 1576-1587.

Sampas, N.M. and D.Z. Anderson(1990) Stabilization of laser beam alignment to an optical resonator by heterodyne detection of off-axis modes. *Appl. Opt.*, **29**: 394-403.

Sampas, N.M., E.K.Gustafson and R.L.Byer (1993) Long-term stability of two diode-laser-pumped nonplanar ring lasers independently stabilized to two Fabry-Perot interferometer. *Opt. Lett.*, **18**: 947-949.

佐藤文隆 (1981) 『相対論と宇宙論』, サイエンス社.

Sato, K (1975) Neutrino Degeneracy in Supernova Cores and Neutral Current of Weak Interaction. *Prog. Theor. Phys.*, **53**: 595.

Sato, K. (1975b) Supernova Explosion and Neutral Current of Weak Interaction. *Prog. Theor. Phys.*, **54**: 1325-

佐藤憲二・馬場吉康 (1989) 「電界複合研磨による金属の超鏡面化技術」, 『真空』, **32**: 655-660.

Sato, M., M. Nishimura, M. Minato, M. Oishi, Y. Sakuma, Y. Ikeda, K. Saito, S. Misawa and S. Tsukahara (1996) A new system of TiN coating on interior surface of cylindrical vacuum chamber by the hollow cathode. *Vacuum*, **47**: 753-756.

Saulson, P.R. (1984) Vibration isolation for broadband gravitational wave antennas. *Rev. Sci. Instrum.*, **55**: 1315-1320.

Saulson, P.R. (1990) Thermal noise in mechanical experiments. *Phys. Rev. D* **42**: 2437-2445.

Saulson, P.R., R.T. Stebbins, F.D. Dumont and S.E. Mock (1994) The inverted pendulum as a probe of anelasticity. *Rev. Sci. Instrum.*, **65**: 182-191.

Schnier, D., J. Mizuno, G. Heinzel, H. Lück, A. Rüdiger, R. Schilling, M. Schempel, W. Winkler and K. Danzmann (1997) Power Recycling in the Garching 30m prototye interferometer for grabitational-wave detection. *Phys. Lett.* A**225**: 210-216.

Schutz, B.F. (1986) Determining the Hubble Constant from gravitational observations. *Nature*, **323**: 310-311.

Schutz, B.F. (1989) Gravitational wave sources and their detectability. *Class Quantum Gra.*, **6**: 1761-1780.

Schutz, B.F. (1991) Data processing, analysis and strage. In D.G. Blair (ed.) *The detaction of gravitational waves* , pp. 406-452.

Shapiro, I.I. (1964) Fourth test of general relativity. *Phys. Rev. Lett.*, **13**: 789.

Shapiro, S.L. and S.A. Teukolsky (1980) Gravitational collapse to neutron stars and black holes. *Astrophys. J.*, **235**: 199-215.

Shapiro, S.L. and S.L. Teukolsky (1983) *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars,* John Wiley.

Shapiro, S.L. and S.A. Teukolsky (1991) Formation of Naked Singularities: The Violation of Cosmic Censorship. *Phys. Rev. Lett.*, **66**: 994-997.

Shapiro, S.L. and S.A. Teukolsky (1993) Relativistic Stellar Systems with Spindle Singularities. *Astrophys. J.*, **419**: 622-635.

Shibata, M., T. Nakamura and K. Oohara (1992) Coalescence of Spinning Binary Neutron Stars of Equal Mass – 3D Simulations –. *Prog. Theor. Phys.*, **88**: 1079-1095.

Shibata, M. and T. Nakamura (1992) Conformal Time Slicing Condition in Three Dimensional Numerical Relativity. *Prog. Theor. Phys.*, **88**: 317-327.

Shibata, M., K. Oohara and t/ Nakamura (1993) Coalescence of Spinning Binary Neutron Stars with Plunging Orbit – Newtonian 3D Numerical Simulation –. *Prog. Theor. Phys.* **89**: 809-819.

Shibata, M. (1993) Gravitational Waves Induced by A Particle Orbiting around a Rotating Black Hole: Effect of Orbital Precession. *Prog. Theor. Phys.*, **90**: 595.

Shibata, M. (1994) Gravitational Radiation by Compact Stars Orbiting Around Rotating Supermassive Black Holes. *Phys. Rev.*, **D50**: 6279.

Shibata, M., K. Nakao, and T. Nakamura (1994) Scalar-type gravitational wave emission from gravitational collapse in Brans-Dicke theory: Detectability by a laser interferometer. *Phys. Rev.*, **D50**: 7304.

Shibata, M., M. Sasaki, H. Tagoshi and T. Tanaka (1995) Gravitational Waves from a Particle Orbiting around a Rotating Black Hole: Post-Newtonian Expansion. *Phys. Rev.*, **D51**: 1646.

霜田光一・矢島達夫・上田芳文・清水忠雄・粕谷敬宏 (1972)『量子エレクトロニクス』(上), 裳華房.

Shine, R.J., A.J. Alfrey and R.L. Byer (1995) 40-W cw, TEM_{00}-mode, diode-laser-pumped, Nd:YAG miniature-slab laser. *Opt. Lett.*, **20**: 459-461.

Shoemaker,D., R. Schilling, L. Schnupp, W. Winkler, K. Maischberger, and A. Rüdiger (1988) Noise behavior of the Garching 30-m prototype gravitational-wave detector. *Phys. Rev.,* **D38**: 423-432.

Shoemaker, D., A. Brillet, C.N. Man, O. Cregut and G. Kerr (1989) Frequency-stabilized laser-diode-pumped Nd:YAG laser. *Opt. Lett.*, bf 14: 609-611.

Shoemaker, D., P. Fritschel, J. Giaime, N. Chirstensen and R. Weiss (1991) Prototype Michelson interferometer with Fabry-Perot cavities. *Appl. Opt.*, **30**: 3133-3138.

Siegman, A.E. (1986) *Lasers*, University Science, Mill Valley, p. 1130.

Siegman, A.E. and E.A. Sziklas (1974) Mode calculations in unstable resonators with flowing saturable gain. 1: Hermite-gaussian Expansion. *Appl. Opt.*, **13**:2775-2792.

Skeldon, K. and J.Hough (1995) Measurements of beam geometry fluctuation of typical argon-ion and Nd:YAG lasers with relevance to laser interferometer gravitational wave detector. *Rev. Sci. Instrum.*, **66**: 2760-2762.

Skeldon, K.D., K.A. Strain, A.I. Grant and J. Hough (1996) Test of an 18-m-long suspended modecleaner cavity. *Rev. Sci. Instrum.* , **67**: 2443-2448.

Smarr, L. and R. Blandford (1976) The Binary Pulsar: Physical Process, possible companions and Evolutionary histories. *Astrophys. J.*, **207**: 574-588.

Stark, R.F. (1989) Non-Axisymmetric Rotating Gravitational Collapse and Gravitational Radiation. In C. Evans, L.S. Finn and D.W. Hobill (eds.) *Frontier of Numerical Relativity*, Cambridge Univ. Press, pp.281-296.

Stark, R.F. and T. Piran (1985) Gravitational Wave Emission from Rotating Gravitational Collapse. *Phys. Rev. Lett.*, **55**: 891-894

Steinhardt, P.J. and F.S. Accetta (1990) Hyperextended inflation. Phys. Rev. Lett., **64**: 2740.

Stephens, M., P. Saulson and J. Kovalik (1991) A double pendulum vibration isolation system for a laser interferometric gravitational wave antenna (1991). *Rev. Sci. Instrum.*, **62**: 924-932.

Strain, K.A. and B.J. Meers (1991) Experimental demonstration of dual recycling for interferometric gravitational-wave detectors. *Phys. Rev. Lett.*, **66**: 1391-1394.

Strain, K.A., K. Danzmann, J. Mizuno, P.G. Nelson, A. Rüdiger, R. Schilling and W. Winkler (1995) Thermal lensing in recycling interferometric gravitational wave detectors. *Phys. Lett. A*, **194**: 124-132.

菅原宏之 (1988)「高速フーリエ変換による安定型共振器の横モード計算」,『レーザー研究』, **16**:119-127.

菅原宏之・竹森　聖 (1985)「高速フーリエ変換による不安定型共振器のモード計算」,『レーザー研究』, **13**:171-179.

菅原　登・青木智則 (1995)「薄膜材料」,『光学』, **24**: 76-82.

Suzuki, T. (1995) Search for continuous gravitational wave from pulsars with resonant detector. *Gravitaional Wave Experiment*, World Scientific, pp. 115-127.

Suzuki,T., K. Tsubono and H. Hirakawa (1978) Quality factor of vibration of aluminum alloy disks. *Phys. Lett. A*, **67**: 2-4.

Symbalisty, E.M.D. (1984) Magnetorotaional iron core collapse. *Astrophys. J.*, **285**: 729-746.

Sziklas, E.A. and A.E. Siegman (1975) Mode calculations in unstable resonators with flowing saturable gain. 2: Fast Fourier transform method. *Appl. Opt.*, **14**: 1874-1889.

Tagoshi, H. and T. Nakamura (1994) Gravitational Waves from a point particle in circular orbit around a black hole: Logarithmic terms in the Post Newtonian expansion. *Phys. Rev.*, **D49**: 4016-4022.

Tagoshi, H. and M. Sasaki (1994) Post-Newtonian Expansion of Gravitational waves from a Particle in Circular orbit around a Schwarzschild Black Hole. *Prog. Theor. Phys.*, **92**: 745-752.

Taylor, J.H. and J.M. Weisberg (1982) A New Test of General Relativity. *Astrophys. J.*, **253**: 908-920.

高橋主人・枝村　学 (1993)「真空排気時間におけに及ぼすリークガス中の水分の影響」,『真空』, **36**: 152-154.

Taylor, J.H. and J.M. Weisberg (1989) Further Experimental Tests of Relativistic Gravity Using the Binary Pulsar PSR1913 +16. *Astrophys. J.*, **345**: 434-450.

Taylor, J.H. (1992a) Pulsar Timing and relativistic Gravity. *Phil. Trans. R. Soc. London*, **341**: 117-134.

Taylor, J.H. (1993a) Testing relativistic gravity with binary and millisecond pulsars. In R.J. Gliser, C.N. Kozameh and O.M. Moreschi (eds.) proceedings of GR12. (Institute of Physics Publishing, Bristol): pp.287-294.

Taylor, J.H. (1993b) Binary Pulsars and Relativistic Gravity. LEX PRIX NOBEL, 80-101.

Taylor, J.H., R.N. Manchester and A.G. Lyne (1993) Catalog of 558 pulsars. *Astrophys. J. Supple.*, **261**: 113-124.

Taylor, J.H. and J.M. Cordes (1993) Pulsar Distances and the Galactic Distribution of Free Electrons. *Astrophys. J.*, **411**: 674-684.

Terada, K., T. Okano and Y. Tuzi (1989) Conductance modulation method for the measurement of the pumping speed outgassing rate of pumps in ultrahigh vacuum. *J. Vac. Sci. Technol.*, **A7(3)**: 2397-2402.

Thorne, K. S. (1980) Multipole expansions of gravitational Radiation. *Rev. Mod. Phys.*, **52**: 299-340.

Thorne, K.S. (1987) Gravitational Radiation. In S.W. Hawking and W. Israel (eds.) *300 years of Gravitation*, Cambridge: Cambridge University Press, 1987, 330-458.

Thorne, K.S. (1995) Gravitational Waves. In *Proceedings of the Snowmass 95 Summer Study on Particle and Nuclear Astrophysics and Cosmology*, World Scientific, pp.398-425

Tidwell, S.C., J.F. Seamans and M.S. Bowers (1993) Highly efficient 60-W TEM_{00} cw diode-pumped Nd:YAG laser. *Opt. Lett.*, **18**: 116-118.

Tomimatsu, A. and H. Sato (1973) New Exact Solution for the Gravitational Field of a Spinning Mass. *Phys. Rev. Lett.*, **29**: 1344-1345.

冨田憲二 (1991)『相対性理論』, 丸善.

坪野公夫 (1983)「微小振動測定とその量子限界」,『日本物理学会誌』, **38**: 567-576.

Tsubono, K. (1995) 300-m laser interferometer gravitational wave detector (TAMA300) in Japan. *Gravitaional Wave Experiment*, World Scientific, pp. 112-114.

Tsubono, K., and S. Moriwaki (1992) Shot-noise limited Low-Frequency Intensity Noise of a Nd:YAG Laser. *Jpn. J. Appl. Phys.*, **31**: 1241-1242.

Tsubono, K., N. Mio, A. Mizutani (1991) Laser interferometer instrumented in a disk antenna for gravitational radiation. *Jpn. J. Appl. Phys.*, **30**: 1326-1330.

Tsubono, K., A. Araya, K. Kawabe, S. Moriwaki and N. Mio(1993) Triple-pendulum vibration isolation system for a laser interferometer. *Rev. Sci. Instrum.*, **64**: 2237-2240.

鶴田匡夫 (1994)『応用光学』, 培風館.

Tubbes, D.L. and D.N. Schramm (1975) Neutrino opacities at High Temperatures and Densities. *Astrophys. J.*, **201**: 467.

Turner, M.S. and F. Wilczek (1990) Relic Gravitational Waves and Extended Inflation. *Phys. Rev. Lett.*, **65**: 3080-3083.

内山龍雄 (1976)『相対性理論』, 岩波書店.

Ueda, A., N. Uehara, K. Uchiyama, K. Ueda, H. Sekiguchi, T. Mitake, K. Nakamura, N. Kitajima, I. Kataoka (1996) Ultra-high quality cavity with 1.5ppm loss at 1064nm. *Opt. Rev.*, **3**: 369-372.

植田憲一 (1988)「紫外レーザー用光学素子」,『光学』, **17**: 628-634.

Uehara, N. and K. Ueda (1993) 193-mHz beat linewidth of frequency-stabilized laser-diode-pumped Nd:YAG ring lasers. *Opt. Lett.*, **18**: 505-507.

Uehara, N. and K. Ueda (1994) Ultrahigh-frequency stabilization of a diode-pumped Nd:YAG laser with a high-power-acceptance photodetector. *Opt. Lett.*, **19**: 728-715.

Uehara, N. and K. Ueda (1995a) Accurate measurement of the radius of curvature of a concave mirror and the power dependence in a high finesse Fabry-Perot interferometer. *Appl. Opt.*, **34**: 5611-5619.

Uehara, N., and K. Ueda (1995b) Accurate measurement of ultralow loss in a high-finesse Fabry-Perot interferometer using the frequency response functions. *Appl. Phys. B*, **61**: 9-15.

Uehara, N., A. Ueda, K. Ueda, H. Sekiguchi, T.Mitake, K. Nakamura, N. Kitajima and I. Kataoka (1995a) Ultralow-loss mirror of the parts-in-10^6 level at 1064nm. *Opt. Lett.*, **20**: 530-532.

Uehara, N., K. Nakahara and K. Ueda (1995b) Continuous-wave TEM_{00}-mode 26.5-W-output virtual-point-source diode-array-pumped Nd:YAG laser. *Opt. Lett.*, **20**: 1707-1709.

Van de Hulst, (1957) *Light Scattering by small particles*, John Wiley §5.

Van den Bergh, S. and G. A. Tamman (1991) Galactic and Extragalactic Supernova Rates. *Ann. Rev. A & Ap.*, **29**: 363-407.

Van den Bergh, S. (1991) Supernova Rates : A progess report. *Phys. Reports*, **204**: 385-400.

Van den Bergh, S. (1992) The Hubble parameter. *Publ. Astron. Soc. Pacific*, **104**: 861-883.

Van den Bergh, S. and R.D. McClure (1994) Rediscussion of Extragalactic Supernova Rates Derived from Evans's 1980-1988 Observations. *Astrophys. J.*, **425**: 205-209.

Veitch, P.J., N.A. Robertson, C.A. Cantley and J. Hough(1993) Active control of a balanced two-stage pendulum vibration isolation system and its application to laser interferometric gravity wave detectors. *Rev. Sci. Instrum.*, **64**: 1330-1336.

Vilenkin, A. (1981) Cosmological Density Fluctuations Produced by Vacuum Strings. *Phys. Rev. Lett.*, **46**: 1169-1172.

Vilenkin, A. (1981) Gravitational Radiation from Cosmic Strings. *Phys. Lett.*, **107B**: 47-50.

Vilenkin, A. (1985) Cosmic Strings and Domain Walls. *Phys. Rep.*, **121**: 264-314.

Vinet, J.-Y. (1986) Recycling interferometer antennas for periodic gravitational waves. *J. Physique*, **47**: 639-643.

Vinet, J-.Y. (1993) Simulation of a misaligned interferometer by modal expansion of the optical field. *VIRGO internal report*: 1-14.

Vinet, J.-Y., B. Meers, C.N. Man and A. Brillet (1988) Optimization of long-baseline optical interferometer for gravitational-wave detector. *Phys. Rev. D*, **38**: 433-447.

Vinet, J.-Y., P.Hello, C.N. Man, and A. Brillet (1992) A high accuracy method for the simulation of non-ideal optical cavities. *J.Phys. I* France, **2**:1287-1303.

VIRGO (1992) *VIRGO Final conceptual design.*

Voorhees, B. H. (1970) Static Axially Symmetric Gravitational Fields. *Phys. Rev.*, **D2**: 2119-2122.

Wagoner, R.V. (1970) Scalar-tensor theory and gravitational waves. *Phys. Rev.*, **D1**: 3209.

Wagoner, R.V. and C.M. Will (1976) Post-Newtonian Gravitational Radiation from Orbiting Point mass. *Astrophys. J.*, **210**: 764-775.

Wagoner, R.V. (1984) Gravitational Radiation from Accreting Neutron Stars. *Astrophsy. J.*, **278**: 345-348.

Walker, M. and C.M. Will (1980a) Gravitational Radiation Quadrupole Formula is Valid for Gravitationally Interacting Systems. *Phys. Rev. Lett.*, **45**: 1741-1744.

Walker, M. and C.M. Will (1980b) The Approximation of Radiative Effects in Relativistic Gravity: Garvitational Radiation Reaction and Energy Loss in Nearly Newtonian Systems. *Astrophys. J.*, **242**: L129-L133.

Walker, T.P., G. Steigman, D.N. Schranm, K.A. Olive and H.S. Kang (1991) Primordial Nucleosynthesis Redux. *Astrophyts. J.*, **376**: 51-69.

Wald, R.M. (1984) *General Relativity*, Univ. Chicago Press.

Wald, R. and V. Iyer (1991) Trapped Surfaces in the Schwarz- schild Gometry and Cosmic Censorship. *Phys. Rev.*, **D44**: R3719-3722.

Wang, W., K. Nakagawa, S. Sayama and M. Ohtsu (1992) Coherent addition of injection-locked high-power AlGaAs diode lasers. *Opt. Lett.*, **17**: 1593-1595.

Weber, J. (1969) Evidence for discovery of gravitational radiation. *Phys. Rev. Lett.*, **22**: 1320-1324.

Whitcomb, S.E. (1984) Optical pathlength fluctuations in an interferometer gravitational-wave detector. *Technical Report*, Caltech, October.

Weinberg, S. (1972) *Gravitation and Cosmology*, Wiley, New York.

Will, C.M. (1971a) Theoretical frameworks for testing relativistic gravity. II. Parametrized post-Newtonian hydrodynamics and the Nordtvedt effect. *Astrophys. J.*, **163**: 611.

Will, C.M. (1971b) Theoretical frameworks for testing relativistic gravity. III. Conservation laws, Lorentz invariance, and values of the PPN parameters. *Astrophys. J.*, **169**: 125.

Will, C.M. (1972) Einstein on the firing line. *Physics Today*, **25** (October): 23.

Will, C.M. (1975) Periastron Shifts in the Binary System PSR 1913+16. *Astrophys. J.*, **196**: L3-L5.

Will, C.M. (1977) Gravitational Radiation from binary systems in alternative metric theories of gravity: Dipole radiation and the binary pulsar. *Astrophys. J.*, **214**: 826.

Will, C.M. (1986) Was Einstein Rights? (松田卓也、二間瀬敏史 (訳)『アインシュタインは正しかったか』, TBSブリタニカ, 1989, pp.201-228.)

Will, C. M. (1993) *Theory and experiment in gravitational Physics* (2nd edition), Cambridge University Press.

Will, C.M. (1994) Testing Scalar-Tensor gravity with gravitational-wave observations of inspiralling Compact binaries. *Phys. Rev.*, **D50**: 6058-6067.

Will, C.M. and H.W. Zaglauer (1989) Gravitational radiation, close binary systems, and the Brans-Dicke theory of gravity. *Astrophys. J.*, **346**: 366.

Wilson, J. (1985) Supernovae and Post-collapse behaviour. In J. Centrella , Jones and Bartlett (ed.) *Numerical Astrophysics*, Publishers, pp. 422-434.

Winkler, W. and R. Schilling (1995) Production of higher order light modes by high optical components. *Gravitational Wave Experiments*, World Scientific: 308-312.

Winkler, W., K. Danzmann, A. Rüdiger and R. Schilling (1991) Heating by optical absorption and the performance of interferometric gravitational-wave detectors. *Phys. Rev.*, **A44**: 7022-7036.

Winkler, W., A. Rüdiger, R. Schilling, K.A. Strain and K. Danzmann (1994) Birefringence-induced losses in interferometer. *Opt. Commun.*, **112**: 245-252

Winkler, W., R. Schilling, K. Danzmann, J. Mizuno, A. Rüdiger, and K.A. Strain (1995) Light scattering described in the mode picture. *Appl. Opt.*, **33**: 7547-7550.

Wiseman, A.(1992) Coalescing Binary systems of conpact objects to post $\frac{5}{2}$ - Newtonian order - Higher - order wave forms and Radiation Recoil. *Phys.Rev.,* **D46**:1517-1539

Witten E. (1984) Cosmic separation of phase. *Phys. Rev.*, **D30**: 272-285.

Wolzczan, A. (1991) A nearby 37.9 ms radio pulsar in relativistic binary system. *Nature*, **350**: 688-690.

Yamada, S. and K. Sato (1994) Gravitational Radiation from Rotational Collapse of a supernova Core. *Astrophys.J.,* **450**: 245-252

山本喜久 (1990) 「重力波検出と量子力学的観測問題」, 『数理科学』, **329**: 33-39.

山本喜久, 渡部仁貴 (1994) [量子光学の基礎] 培風館, p.102.

山岡　均・茂山俊和 (1992) 「連星中性子星形成のシナリオ」, 『天文月報』8 月号

Yamaoka, H., T. Shigeyama and K. Nomoto (1993) Formation of double neutron star systems and asymmetric supernova explosions. *Astron & Astrophys.*, **267**: 433-438.

Yang, S.T., Y. Imai, M. Oka, N. Eguchi and S. Kubota (1996) Frequency-stabilized, 10-W continuous-wave, laser-diode end-pumped, injection-locked Nd:YAG laser. *Opt. Lett.*, **21**: 1676-1678.

Yariv, A. (1985) Introduction to Optical Electronics. (『光エレクトロニクスの基礎』多田邦雄・神谷武志 (訳) (1985), 丸善.)

York, J. and L. Smarr (1978) Radiation Gauge in General Relativity. *Phys. Rev.*, **D17**: 1945-1956.

Yoshida, S. and Y. Eriguchi (1995) Grabitaional Radiation Driven Secular Instability of Rotating Polytropes. *Astrophys. J.*, **438**: 830-840.

吉田貞史・矢嶋弘義 (1994) 『薄膜・光デバイス』, 東京大学出版会, pp. 14-23.

Zee, A. (1979) Broken-symmetric theory of gravity. *Phys. Rev. Lett.*, **42**: 417.

Zel'dovich, Ya.B. (1980) Cosmological fluctuations produced near a singularity. *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **192**: 663-667.

Zhuge, X, J. Centrella, S.L.W. McMillan (1994) Gravitational Radiation from Coalescing Binary Netron Stars. *Phys. Rev.*, **D50**: 6247-6261.

Zimmermann, M. and E. Szedenits (1979) Gravitational Waves from rotating and precessing rigid bodies. *Phys. Rev.*, **D20**: 351-355.

Zipoly. J. (1966) Topology of Some Spheroidal Metrics. *J. Math. Phys.*, **7**: 1137-1143.

Zwerger, T., E. Müller, M. Ruffert and G. Schäfer Talk at 3rd Annual Penn. State Workshop (July 1995).

索　引

執筆者 (執筆順)

中村卓史　京都大学基礎物理学研究所
大橋正健　国立天文台
三尾典克　東京大学大学院工学系研究科
植田憲一　電気通信大学レーザー極限技術研究センター
河邊径太　東京大学大学院理学系研究科
堀越源一　高エネルギー物理学研究所 (名誉教授)
前田恵一　早稲田大学理工学部
森脇成典　東京大学大学院工学系研究科
河島信樹　近畿大学理工学部
佐々木明　日本原子力研究所関西研究所光量子科学センター

重力波をとらえる — 存在の証明から検出へ

1998 (平成 10) 年 6 月 10 日　初版第一刷発行

編著者　中 村 卓 史
　　　　三 尾 典 克
　　　　大 橋 正 健

発行者　尾 﨑 芳 治

発行所　京都大学学術出版会
京都市左京区吉田本町
京都大学構内 (〒 606-8501)
電話　075-761-6182
FAX　075-761-6190
振替　01000-8-64677

印刷・　中西印刷　　製本・　四季製本

ISBN4-87698-032-2　定価はカバーに表示してあります